А.И. СОТСКОВ, Г.В. КОЛЕСНИК

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ В ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИКИ

ТВЕРЬ 2005

Федеральное агентство по образованию
государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Тверской государственный университет"

А.И. Сотсков, Г.В. Колесник

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ В ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИКИ

Допущено Учебно-методическим объединением по образованию в области статистики и антикризисного управления в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 080116 "Математические методы в экономике" и другим экономическим специальностям

ТВЕРЬ 2005

УДК 330.4 (075.8)
ББК У.в635я73-1
С67

Рецензенты:

Заведующий кафедрой оценки и управления собственностью
Государственного университета управления,
доктор экономических наук, профессор
В.И. Бусов

Профессор кафедры экономики оборонно-промышленного комплекса
Центра оборонных проблем Академии военных наук,
доктор физико-математических наук, профессор
Г.О. Крылов

Сотсков А.И., Колесник Г.В.
С67 Управление динамическими системами в задачах экономики: Учебное пособие. – Тверь, Твер. гос. ун-т., 2005. – 120 с.

Настоящее пособие знакомит с основными условиями оптимальности и методами решения задач вариационного исчисления и оптимального управления. Будет полезно для подготовки и проведения практических занятий, а также при выполнении домашних заданий студентами по курсам "Оптимальное управление", "Методы оптимизации" и "Математическая экономика".

Математические модели экономических систем, изложенные во второй части пособия, могут быть предложены студентам в качестве материала для самостоятельных и курсовых работ.

Рис. 25. Библиогр.: 44.

УДК 330.4 (075.8)
ББК У.в635я73-1

Предисловие

В настоящее время большое внимание в экономических исследованиях уделяется изучению динамических аспектов функционирования экономических систем. В связи с этим в современной математической экономике играют важную роль методы оптимального управления и динамического программирования.

Опыт преподавания этой дисциплины показывает, что она является одной из наиболее сложных для освоения. Это прежде всего связано с концептуальными отличиями изучаемых в ней задач от задач конечномерной оптимизации и, как следствие, с существенным усложнением используемых в них условий оптимальности.

Представляется полезным дать наглядную иллюстрацию применения указанных условий оптимальности к решению задач различных типов. Настоящее пособие и является попыткой такой иллюстрации. В нем содержатся примеры и задачи по следующим темам:

- вариационному исчислению;
- принципу максимума в задачах без ограничений;
- принципу максимума при наличии фазовых ограничений;
- особым управлениям;
- динамическому программированию.

Каждый раздел состоит из теоретической части, описывающей базовые понятия и результаты, используемые при решении соответствующих задач, примеров с решениями, а также задач для самостоятельной работы студентов.

Вторая глава пособия содержит прикладные результаты, связанные с применением методов теории оптимального управления к исследованию функционирования производственно-экономических систем.

Настоящее пособие будет полезным преподавателям при подготовке и проведении практических занятий, а также студентам при выполнении домашних заданий по курсам "Оптимальное управление", "Методы оптимизации" и "Математическая экономика".

Глава 1. Математические основы оптимизации управления динамическими системами

§ 1. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

О п р е д е л е н и е. Пусть **M** – некоторое пространство функций. Отображение J: $\mathbf{M} \to \mathbb{R}^1$ называется *функционалом*.

Ниже будем рассматривать следующие пространства функций:

$C[t_1, t_2]$ – непрерывные на отрезке $[t_1, t_2]$ функции, с нормой, определенной следующим образом: $\|x(\cdot)\|_0 = \max\{ |x(t)|, t \in [t_1, t_2]\}$;

$C^1[t_1, t_2]$ – непрерывно дифференцируемые на отрезке $[t_1, t_2]$ функции, с нормой $\|x(\cdot)\|_1 = \max\{ \|x(\cdot)\|_0, \|x'(\cdot)\|_0\}$.

Простейшая задача вариационного исчисления формулируется следующим образом: найти экстремум функционала вида

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, x')dt \tag{1.1}$$

на множестве кусочно-гладких функций $x(\cdot)$, соединяющих точки (t_1, x_1) и (t_2, x_2), т.е. удовлетворяющих краевым условиям $x(t_1) = x_1$; $x(t_2) = x_2$. Функции $x(\cdot)$, удовлетворяющие ограничениям задачи (в данном случае граничным условиям), называются *допустимыми*.

О п р е д е л е н и е. Говорят, что $x^*(\cdot)$ доставляет *слабый локальный максимум* функционалу J, если $\exists\ \varepsilon > 0$: для любой допустимой кривой $x(\cdot)$, такой, что $\| x^*(\cdot) - x(\cdot)\|_1 < \varepsilon$, выполнено: $J(x(\cdot)) \le J(x^*(\cdot))$.

Говорят, что $x^*(\cdot)$ доставляет *сильный локальный максимум* функционалу J, если $\exists\ \varepsilon > 0$: для любой допустимой кривой $x(\cdot)$, такой, что $\| x^*(\cdot) - x(\cdot)\|_0 < \varepsilon$, выполнено $J(x(\cdot)) \le J(x^*(\cdot))$.

Необходимое условие слабого экстремума функционала (1.1) дается *уравнением Эйлера*:

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 0. \tag{1.2}$$

Гладкое решение уравнения Эйлера называется *экстремалью* функционала J.

Примеры

1. Найти экстремаль в задаче: $J=\int_1^2 (t^2x'+tx'^2)dt$; $x(1) = a$; $x(2) = b$.

Р е ш е н и е. $F(\mathrm{t}, x, x') = t^2x' + tx'^2$, $F_x = 0$, $F_{x'} = t^2 + 2tx'$. Составим уравнение Эйлера:

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 2t + 2x' + 2\, tx'' = 0.$$

Видно, что в это уравнение не входит x. Обозначим $y = x'$, тогда $y' = x''$ и уравнение примет вид

$$t + y + ty' = 0.$$

Решением данного уравнения является $y(t) = c/t - t/2$. Тогда

$$x(t) = \int y(t)dt + d = c \ln t - t^2/4 + d. \qquad (1.3)$$

Находя постоянные c и d из краевых условий, окончательно получаем

$$x^*(t) = \frac{b-a+3/4}{\ln 2} \ln t - t^2/4 + a + 1/4.$$

Функция $x^*(t)$ гладкая на $[1, 2]$, следовательно, она является экстремалью.

З а м е ч а н и е. В задаче с функционалом $J=\int_0^1 (t^2x'+tx'^2)dt$ экстремали отсутствуют, так как решения уравнения Эйлера (1.3) теряют гладкость на отрезке [0, 1].

2. Найти экстремаль и проверить, доставляет ли она слабый минимум в задаче:

$$J=\int_0^1 (x')^2 dt; \quad x(0) = 0; \quad x(1) = 1.$$

Р е ш е н и е. $F(t, x, x') = (x')^2$, $F_x = 0$, $F_{x'} = 2x'$. Составим уравнение Эйлера:

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = -\, 2\, x'' = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $x(t) = ct + d$. Из краевых условий окончательно получаем экстремаль $x^*(t) = t$.

Проверим, что она действительно доставляет экстремум функционалу J. Рассмотрим произвольное приращение $h(\cdot)\in \mathrm{C}^1$, такое, что $h(0) = h(1) = 0$, и исследуем, как изменится значение функционала J:

$$J(x+h)-J(x)=\int_0^1 (x'+h')^2 dt-\int_0^1 (x')^2 dt=2\int_0^1 (x'h')dt+\int_0^1 (h')^2 dt \ge 2\int_0^1 (x'h')dt.$$

Беря последний интеграл по частям, получим при $x(\cdot) = x^*(\cdot)$

$$\int_0^1 (x'h')dt = \int_0^1 (x')dh = x'h\Big|_0^1 - \int_0^1 (x''h)dt = 0.$$

Таким образом, $J(x^* + h) \ge J(x^*)$, т.е. $x^*(\cdot)$ доставляет глобальный минимум функционалу J.

3. Найти экстремаль и проверить, доставляет ли она слабый и сильный минимум в задаче:

$$J=\int_0^{\pi} x^2(1-x'^2)dt; \quad x(0) = x(\pi) = 0.$$

Р е ш е н и е . $F(\mathrm{t}, x, x') = x^2(1 - x'^2)$, тогда $F_x = 2x(1 - x'^2)$, $F_{x'} = -2x'x^2$ и

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 2x(1 - x'^2) + 2x''x^2 + 4xx'^2 = 0.$$

Проведем замену переменных: $x' = p(x)$, $x'' = p_x x' = p_x p$. Тогда уравнение преобразуется к виду

$$x(1 - p^2) + p_x p x^2 + 2xp^2 = 0,$$

или

$$x + p_x p x^2 + xp^2 = 0.$$

Одним из его корней является $x(t) \equiv 0$. Ненулевые корни определяются из соотношения

$$1 + p_x p x + p^2 = 0.$$

Проверим, что $x(t) \equiv 0$ доставляет слабый минимум функционалу J. Действительно, для $\forall z(\cdot) \in \mathrm{C}^1[0, \pi]$: $\|z(\cdot)\|_1 < \varepsilon$ имеем, что $\forall t\in[0, \pi]$ $|z'(t)| < \varepsilon$. Тогда для $\varepsilon < 1$ $J(z(\cdot)) > 0$, в то время как $J(x(\cdot)) = 0$.

Сильный минимум не достигается, так как положив, например, $z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin nt$, получим $J(z_n(\cdot)) = \pi/(2n) - \pi/8 < 0$ при $n > 4$. В то же время для достаточно больших n функции $z_n(t)$ лежат в сколь угодно малой сильной окрестности функции $x(t) \equiv 0$.

Упражнения

1. В задаче

$$J=\int_0^1 t^{2/3}\dot{x}^2dt\to\min;\quad x(0)=0;\quad x(1)=1$$

показать, что решение уравнения Эйлера существует, единственно, доставляет абсолютный минимум, но не является функцией класса C^1.

2. Показать, что в задаче

$$J=\int_0^1 t^2\dot{x}^2dt\to\min;\quad x(0)=0;\quad x(1)=1$$

не существует ни одного решения уравнения Эйлера. Найти минимизирующую последовательность (если она имеется).

3. Определить экстремаль, удовлетворяющую краевым условиям и проверить, доставляет ли она слабый минимум:

а) $J=\int_{-1}^{1} t^2x'^2dt$; $x(-1)=-1$; $x(1)=1$;

б) $J=\int_0^1 xx'^2dt$; $x(0)=0$; $x(1)=1$;

в) $J=\int_0^1 (1+t)x'^2dt$; $x(0)=0$; $x(1)=1$;

г) $J=\int_0^1 x^2x'^2dt$; $x(0)=0$; $x(1)=1$;

д) $J=\int_0^{3\pi/2}(x'^2-x^2)dt$; $x(0)=x(3\pi/2)=0$;

е) $J=\int_a^b\sqrt{1+x'^2}\,dt$; $x(a)=0$; $x(b)=1$.

Список литературы

1. Гельфанд И.М., Фомин С.В. *Вариационное исчисление.* – М.: Физматгиз, 1961.
2. Цлаф Л.Я. *Вариационное исчисление и интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1966.
3. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* – М.: Наука, 1965.

§ 2. Задача оптимального управления. Принцип максимума

Пусть имеется некоторая динамическая система, *состояние* которой в каждый момент времени t описывается вектор-функцией $x(t)\in \mathbb{R}^n$. На состояние системы можно воздействовать, изменяя управляемые параметры $u(t)\in \mathbf{U}_t \subseteq \mathbb{R}^r$. Будем рассматривать класс кусочно-непрерывных управлений $u(t)$.

При заданном *управлении* $u(t)$ состояние системы изменяется во времени согласно закону

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)). \tag{2.1}$$

Рассмотрим *задачу оптимального управления* данной системой: определить управление $u^*(t)$, доставляющее экстремум *критерию качества* вида

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt + \Phi_0(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) \to \max. \tag{2.2}$$

При этом первое слагаемое (*интегральная часть* критерия) характеризует качество функционирования системы на всем промежутке управления $[t_0, t_1]$, тогда как второе слагаемое (*терминальный член*) – только конечный результат воздействия управления, определяемый начальным $x(t_0)$ и конечным $x(t_1)$ состояниями и, возможно, моментами начала и окончания управления t_0 и t_1. В зависимости от физического смысла задачи интегральная или терминальная часть критерия может быть равна нулю.

На процесс функционирования системы могут накладываться дополнительные ограничения в форме краевых условий:

$$\Phi_i(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.3}$$

задающие множества допустимых начальных и конечных состояний системы и моментов начала и окончания управления.

Важным частным случаем (2.3) являются условия вида

$$x(t_0) - x_0 = 0; \quad x(t_1) - x_1 = 0, \tag{2.4}$$

соответствующие *закрепленному* левому или правому концу фазовой траектории.

Моменты времени начала и окончания управления, t_0 и t_1, могут полагаться как известными, тогда говорят о задаче с *фиксированным* временем управления, так и неизвестными (задача с *нефиксированным* моментом начала или окончания управления).

Необходимые условия оптимальности в данной задаче, точнее, необходимые условия сильного локального максимума даются принципом максимума Понтрягина.

Теорема. Пусть $(x^*(t), u^*(t), t_0^*, t_1^*)$ – оптимальный процесс в задаче (2.1) – (2.3). Тогда найдутся одновременно не равные нулю множители λ и ψ : $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\lambda_0 \geq 0$ и $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, такие, что выполнены следующие условия:

а) *функция Понтрягина* задачи

$$H(t, x, u, \psi, \lambda_0) = \lambda_0 F(t, x, u) + (\psi, f(t, x, u)) \tag{2.5}$$

при каждом $t \in [t_0, t_1]$ достигает максимума по u в т. $u^*(t)$, когда $x = x^*(t)$, $\psi = \psi(t)$;

б) вектор-функция $\psi(t)$ удовлетворяет *сопряженной системе* дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H(t, x^*(t), u^*(t), \psi(t), \lambda_0)}{\partial x_i}; \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.6}$$

с краевыми условиями (*условия трансверсальности*)

$$\psi_i(t_0^*) = -\left(\lambda, \frac{\partial \Phi(t_0^*, t_1^*, x^*(t_0), x^*(t_1))}{\partial x_i(t_0)}\right);$$

$$\psi_i(t_1^*) = \left(\lambda, \frac{\partial \Phi(t_0^*, t_1^*, x^*(t_0), x^*(t_1))}{\partial x_i(t_1)}\right); \tag{2.7}$$

в) выполнены условия на подвижные концы:

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \psi(t), \lambda_0)\,|_{\,t = t_0} = \left(\lambda, \frac{\partial \Phi(t_0^*, t_1^*, x^*(t_0), x^*(t_1))}{\partial t_0}\right); \tag{2.8}$$

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \psi(t), \lambda_0)\,|_{\,t = t_1} = -\left(\lambda, \frac{\partial \Phi(t_0^*, t_1^*, x^*(t_0), x^*(t_1))}{\partial t_1}\right). \tag{2.9}$$

Замечания.

1. Множитель Лагранжа λ_0 определяет чувствительность оптимального решения задачи к виду интегральной части функционала. В *вырожденном случае* совокупность ограничений задачи такова, что оптимальное управление $u^*(t)$ не зависит от вида интегранта $F(t, x(t), u(t))$. При этом из условий принципа максимума следует, что $\lambda_0 = 0$. В *невырожденном случае* $\lambda_0 > 0$, поэтому ее можно положить равной 1 (разделив функцию H на λ_0). При этом условия принципа максимума не изменятся.

Как правило, из физического смысла задачи понятно, допускаются ли в ней вырожденные решения. При исследовании таких решений необходимо обращать внимание на выполнение условия теоремы о том, что множители λ и $\psi(t)$ не могут одновременно быть равными 0.

2. Для задачи с закрепленными концами (2.4) сопряженная функция $\psi(t)$ имеет свободные концы, т.е. соответствующие условия трансверсальности отсутствуют.

Обратно, для задачи со свободными концами, не содержащей ограничений вида (2.3), сопряженная функция имеет закрепленные концы, определяемые соотношениями

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial \Phi_0(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1))}{\partial x_i(t_0)}; \quad \psi_i(t_1) = \frac{\partial \Phi_0(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1))}{\partial x_i(t_1)}. \qquad (2.7')$$

Примеры

1. Найти оптимальное управление в задаче:

$$J(u, x) = \int_0^4 (u^2 + x)dt \to \min; \quad \dot{x} = u;\ x(0) = 0;\ |u| \le 1.$$

Р е ш е н и е . Перепишем ее в виде задачи на максимум

$$-\int_0^4 (u^2 + x)dt \to \max$$

и воспользуемся теоремой о необходимых условиях.

Функция Понтрягина (рис. 2.1):

$$H = -\lambda_0(u^2 + x) + \psi u.$$

Сопряженная система:

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda_0.$$

Условие трансверсальности:

$$\psi(4) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x(1)} = 0,$$

т.к. правый конец фазовой траектории свободен.

Исследуем вырожденный случай: положим $\lambda_0 = 0$.

Тогда $\dot{\psi} \equiv 0$, откуда следует, что $\psi = \mathrm{const}$. Но из условия трансвер-

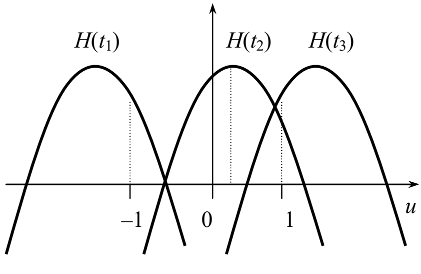

Рис. 2.1

сальности следует, что $\psi \equiv 0$. Таким образом, получили, что множители λ_0 и ψ одновременно равны 0, что противоречит условию теоремы. Следовательно, вырожденных решений задача не имеет.

Положим $\lambda_0 = 1$. Тогда

$$H = \psi u - u^2 - x \to \max_u ;$$

$$\dot{\psi} = 1; \quad \psi(4) = 0.$$

H является квадратичной, отрицательно определенной функцией u. Вершина параболы отыскивается из условия экстремума 1 порядка:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi - 2u = 0.$$

Если она лежит внутри отрезка изменения управления [–1, 1], то она и является точкой максимума. В противном случае максимум H достигается на правой либо левой границе отрезка (см. рис. 2.1).

Таким образом, получаем:

$$u^*(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\psi(t), & |\psi(t)| > 2 \\ \dfrac{\psi(t)}{2} & |\psi(t)| \le 2 \end{cases}.$$

Оптимальное управление зависит от величины $\psi(t)$. Решая сопряженную систему, получаем $\psi(t) = t - 4$. Видно, что $-4 \le \psi(t) \le -2$ при $0 \le t \le 2$ и $-2 \le \psi(t) \le 0$ при $2 \le t \le 4$. Тогда

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{t-4}{2} & 2 \le t \le 4 \end{cases}.$$

Определим теперь фазовую траекторию $x^*(t)$, соответствующую оптимальному управлению:

$$\dot{x} = u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{t-4}{2} & 2 \le t \le 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^*(t) = \begin{cases} -t + c_1, & 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{t^2}{4} - 2t + c_2, & 2 \le t \le 4 \end{cases}.$$

Для участка траектории при $t \in [0, 2]$ постоянная интегрирования c_1 находится из начального условия $x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. Для участка при $t \in [2, 4]$ воспользуемся условием непрерывности фазовой траектории $x(t)$ в точке $t = 2$:

$$\lim_{t \to 2-} x(t) = \lim_{t \to 2+} x(t).$$

Из этого условия получаем $c_2 = 1$. Итак, окончательно имеем

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{t-4}{2} & 2 \le t \le 4 \end{cases}, \qquad x^*(t) = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{t^2}{4} - 2t + 1, & 2 \le t \le 4 \end{cases}.$$

2. Найти траекторию $x(t)$, доставляющую минимум функционалу

$$J(u, x) = \int_0^2 |\ddot{x}|\, dt$$

при ограничениях

$$\ddot{x} \le 2, \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 1, \quad \dot{x}(2) = 2.$$

Решение. Введем обозначения $x(t) = x_1(t)$, $\dot{x}(t) = x_2(t)$, $\ddot{x}(t) = u(t)$. Тогда исходная задача запишется в следующем виде:

$$J(u, x) = \int_0^2 |u|\, dt \to \min, \quad u(t) \le 2,$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(2) = 1,$$

$$\dot{x}_2 = u, \quad x_2(2) = 2.$$

Выпишем необходимые условия оптимальности для этой задачи:

$$H = -\lambda_0|u| + \psi_1 x_2 + \psi_2 u \to \max; \tag{2.10}$$

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1; \quad \psi_2(0) = 0.$$

Рассмотрим вырожденный случай $\lambda_0 = 0$. Тогда $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u$ и максимум достигается, когда

$$u(t) = \begin{cases} -\infty, & \psi_2(t) < 0 \\ (-\infty, 2], & \psi_2(t) = 0 \\ 2, & \psi_2(t) > 0 \end{cases}.$$

Управление $u(t) = -\infty$ при $\psi_2(t) < 0$ нереализуемо. При $\psi_2(t) = 0$ получаем $\psi_1(t) = 0$, что противоречит условиям принципа максимума. При $u(t) = 2$ траектория движения имеет следующий вид:

$$\dot{x}_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = 2t + a, \tag{2.11}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = t^2 + at + b.$$

Тогда из краевых условий получаем: $a = -2$, $a = -3/2$, $b = 0$. Таким образом, для $u(t) = 2$ при $\psi_2(t) > 0$ допустимых экстремалей нет.

Рассмотрим теперь невырожденный случай $\lambda_0 = 1$. Условие оптимальности по $u(t)$ принимает вид

$$H = -|u| + \psi_1 x_2 + \psi_2 u \to \max, \quad u \le 2.$$

Решением задачи максимизации (2.10) в этом случае является управление

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \psi_2(t) < 1 \\ 2, & \psi_2(t) \ge 1 \end{cases}.$$

Из сопряженной системы получаем

$$\psi_1(t) = c_1; \quad \psi_2(t) = -c_1 t + c_2.$$

Учитывая условие трансверсальности $\psi_2(0) = 0$, находим $c_2 = 0$, откуда $\psi_2(t) = -c_1 t$. Для такой функции $\psi_2(t)$ величина $(\psi_2(t) - 1)$ может менять знак не более одного раза, поэтому оптимальное управление будет иметь вид

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \tau \\ 2, & \tau \le t \le 2 \end{cases}.$$

Определим момент переключения управления τ. На отрезке $[0, \tau]$ траектория подчиняется системе уравнений:

$$\dot{x}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = a,$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = at + b.$$

Из начального условия $x_1(0) = 0$ находим $b = 0$, т.е. $x_1(t) = at$.

На отрезке $[\tau, 2]$ основная система уравнений имеет вид (2.11), при этом из краевых условий получаем $a = -2$, $b = 1$.

Из условия непрерывности фазовой траектории в точке τ получаем систему уравнений для определения параметров τ и a:

$$x_1(\tau^-) = at = \tau^2 - 2\tau + 1 = x_1(\tau^+); \qquad x_2(\tau^-) = a = 2\tau - 2 = x_2(\tau^+).$$

Отсюда $\tau = 1$, $a = 0$.

Итак, оптимальный процесс в данной задаче имеет вид

$$x^*(t) = x_1^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1 \\ t^2 - 2t + 1, & 1 \le t \le 2 \end{cases}.$$

3. Простейшая задача оптимального управления для потребителя

Рассматривается модель потребителя:

$$\max \int_0^T ce^{-\beta t}\, dt,$$

$$\dot W = rW - c, \ \ t \in [0, T].$$

Граничные условия имеют вид $W(0) = W_0$, $W(T) = W_T$ и ограничение на объем мгновенного потребления c: $0 \le c \le 1$. Здесь W - реальное богатство потребителя, которое прирастает с темпом r, это фазовая координата. Часть его потребитель тратит на потребление c - это управление, а другая часть идет на приращение богатства. Для определенности будем считать, что $\beta < r$, а также, что $W_0\, e^{rt} > W_T$.

Функция Понтрягина H и сопряженная система имеют вид

$$H = \psi_0\, ce^{-\beta t} + \psi_1 (rW - c),$$

$$\dot\psi_1 = -\, r\psi_1\,,$$

где $\psi_0 = const \ge 0$ и одновременно ψ_0 и ψ_1 не обращаются тождественно в ноль. Уравнение можно сразу проинтегрировать: $\psi_1(t) = \psi_1(0)\, e^{-rt}$. Условие максимума H по c дает соотношение

$$(\psi_0\, e^{-\beta t} - \psi_1(0)\, e^{-rt})\, c \to \max \ \text{ по } c\text{: } 0 \le c \le 1.$$

Отсюда заключаем, что если $\psi_1(0) \le 0$, то получаем режим $c \equiv 1$, который будет оптимальным при некотором достаточно высоком $W(0)_{\max}$. Если наше W_0 меньше, то отрицательное $\psi_1(0)$ не годится, значит, $\psi_1(0) > 0$. В этом случае, если $\psi_0 = 0$, то реализуется режим $c \equiv 0$, который также будет оптимальным при некотором достаточно низком $W(0)_{\min}$. Если наше W_0 выше, то нулевое ψ_0 не годится, значит, $\psi_0 > 0$. В таком случае его можно считать равным 1, воспользовавшись тем, что сопряженный вектор $\psi = (\psi_0, \psi_1)$ определен с точностью до положительного множителя. Условие максимума H по c запишем в более удобном виде:

$$(1 - \psi_1(0)\, e^{-(r-\beta)\, t})\, c \to \max \ \text{ по } c\text{: } 0 \le c \le 1.$$

Отсюда видно, что режимы, для которых $W(0)_{\min} < W(0) < W(0)_{\max}$, проходят с переключением $\psi_1(0) > 1$, $c(t) = 0$ на начальном отрезке, затем в некоторый момент t наступает равенство: $\psi_1(0)e^{-(r-\beta)\, t} = 1$ и затем $c(t) =1$ до конца интервала управления.

То, что описанные режимы действительно доставляют максимум функционалу, следует из вогнутости функции Понтрягина по совокупности фазовой координаты и управления, W и c. Картина фазовых траекторий представлена на рис. 2.2. Аналогичный анализ можно провести для случая, когда $\beta > r$. Тогда переключения будут происходить с режима $c = 1$ на $c = 0$ (см. рис. 2.2).

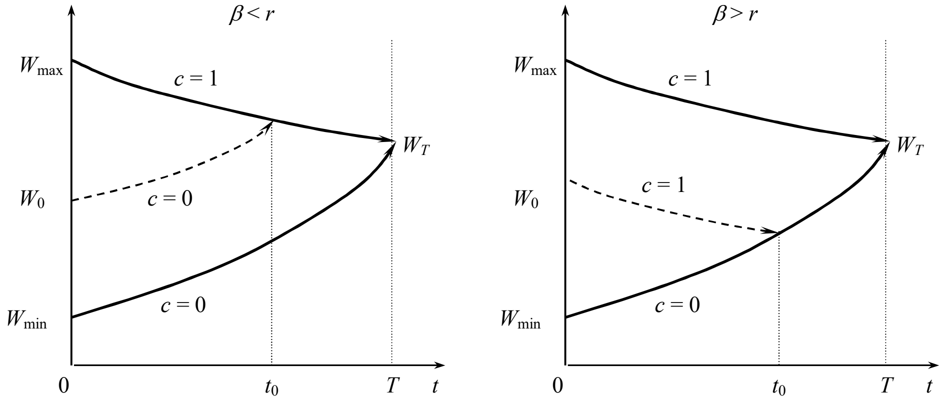

Рис. 2.2

4. Задача оптимального управления со свободным правым концом

Рассматривается модель потребителя:

$$\max \int_0^T ce^{-\beta t}dt + \Phi(W_T),$$

$$\dot{W} = rW - c, \; t \in [0, T].$$

Граничные условия имеют вид $W(0) = W_0$, W_T свободно, ограничение на объем мгновенного потребления $0 \le c \le 1$. Функция Φ определена и дифференцируема на $\mathbb{R}_+$, $\Phi' > 0$, $\Phi'' < 0$. Для определенности будем считать, что $\beta < r$.

Функция Понтрягина H и сопряженная система имеют вид

$$H = \psi_0 \, ce^{-\beta t} + \psi_1 (rW - c),$$

$$\dot{\psi}_1 = -r\psi_1,$$

с граничным условием (условием трансверсальности)

$$\psi_1(T) = \psi_0 \Phi'(W_T),$$

где $\psi_0 = const \ge 0$ и одновременно ψ_0 и ψ_1 не обращаются тождественно в ноль. Отсюда следует, что $\psi_0 > 0$, $\psi_1 > 0$. Положим $\psi_0 = 1$. Сопряженное уравнение можно проинтегрировать: $\psi_1(t) = \psi_1(0)\, e^{-rt}$. Тогда условие трансверсальности принимает вид

$$\psi_1(0)\, e^{-rt} = \psi_0 \Phi'(W_T).$$

Условие максимума функции H по c дает соотношение

$$(1 - \psi_1(0)\, e^{-(r-\beta)t})\, c \to \max_c, \;\; 0 \le c \le 1.$$

Отсюда получаем, что оптимальным является управление $c = 0$ при $\psi_1(0)\, e^{-(r-\beta)t} > 1$ и $c = 1$ при $\psi_1(0)\, e^{-(r-\beta)t} < 1$.

При этом возможно не более одного переключения с режима $c = 0$ на режим $c = 1$. В частности, при $t = T$, учитывая условие трансверсальности, можно разбить терминальное множество $\{(t, W) \mid t = T, W \ge 0\}$ на плоскости (t, W) на две части: $\Phi'(W_T)\, e^{\beta T} > 1$, где $c = 0$, и $\Phi'(W_T)\, e^{\beta T} < 1$, где $c = 1$.

Точка W_T^*, такая, что $\Phi'(W_T^*)\, e^{\beta T} = 1$, разграничивает эти области. Из условия максимума H по c видно, что если $W(T) = W_T^*$, то при всех $t < T$ $c(t) = 0$. Этому режиму соответствует траектория $W(t) = W_0^* e^{rt}$. В силу вогнутости Φ неравенство $\Phi'(W_T)\, e^{\beta T} > 1$ сохранится для всех начальных условий $W_0 < W_0^*$. Таким образом, для всех $W_0 < W_0^*$ получаем экстремали $W(t) = W_0\, e^{rt}$ с управлением $c \equiv 0$.

При $W_0 > W_0^*$ возможно переключение. Построим кривую переключения в координатах (t, W). На оси $t = T$ кривая начинается в точке W_T^*. Чтобы определить ее при $t < T$, заметим, что момент переключения t находится из условия

$$\psi_1(0)\, e^{-(r-\beta)t} = 1.$$

Выразим $\psi_1(0)$ из условия трансверсальности и подставим в последнее уравнение. Получим:

$$\Phi'(W_T)\, e^{rT} e^{-(r-\beta)t} = 1 \text{ или}$$

$$\ln \Phi'(W_T) + r(T - t) + \beta t = 0. \qquad (2.12)$$

Зная, что при $W_T > W_T^*$ на последнем участке траектории $c = 1$, проинтегрируем уравнение $\dot{W} = rW - 1$ в пределах от t до T, считая, что $W(T) = W_T$, а в момент t имеем X:

$$W(T)\, e^{-rT} - X\, e^{-rt} = (e^{-rT} - e^{-rt})/r \text{, или}$$

$$W(T) = e^{rT}(X\, e^{-rt} + (e^{-rT} - e^{-rt})/r\,).$$

Подставим это выражение для $W(T)$ в уравнение (2.12):

$$\ln \Phi'(r^{-1} - (r^{-1} - X)\, e^{r(T-t)}) + rT - (r - \beta)\, t = 0. \qquad (2.13)$$

Неявная функция $X(t)$ из соотношения (2.13) описывает кривую переключения. Легко проверить, что кривая $X(t)$ убывает (с темпом, большим, чем r) с ростом t от $t = 0$ до $t = T$. Любая траектория,

$\beta < r$

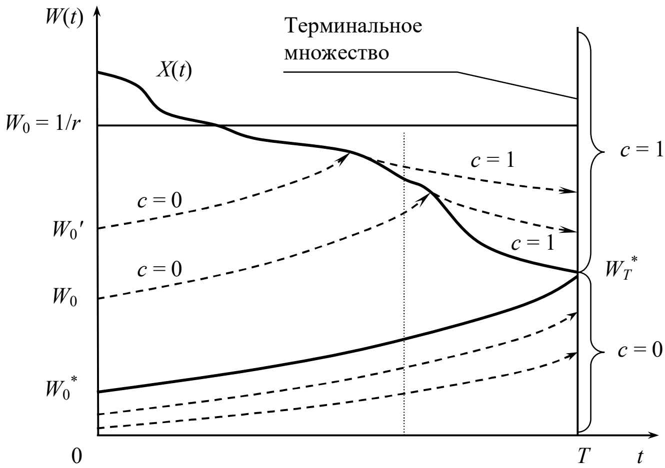

Рис. 2.3

начинающаяся из точки $W_0 < X(0)$, переключается с $c = 0$ на $c = 1$ на кривой $X(\cdot)$. На этом задача синтеза оптимального управления завершена.

Полученные результаты проиллюстрированы на рис. 2.3.

5. З а д а ч а н а б ы с т р о д е й с т в и е . Имеется динамическая система, характеризуемая координатой x и скоростью v. Параметром управления является ускорение системы, выбираемое из отрезка $[-1, 1]$. Требуется за минимальное время T перевести систему из начального состояния (x_0, v_0) в состояние $(0, 0)$. Фиксируем время начала процесса. Время окончания, очевидно, свободное.

Р е ш е н и е . Запишем условие задачи в формальном виде:

$$T \to \min;$$
$$\dot{x} = v; \quad x(0) = x_0; \quad x(T) = 0;$$
$$\dot{v} = u; \quad v(0) = v_0; \quad v(T) = 0;$$
$$|u| \le 1.$$

Функционал задачи может быть преобразован к интегральному виду:

$$-\int_0^T 1dt \to \max.$$

I. Решим задачу с использованием принципа максимума. Его условия в данном случае имеют вид

$$H = -\lambda_0 + \psi_1 v + \psi_2 u \to \max_u \ ;$$

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0; \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\psi_1; \ H(t_1) = 0.$$

Так как и правый, и левый конец фазовой траектории закрепленный, то условия трансверсальности на сопряженные функции отсутствуют.

Так как функция Понтрягина линейна по u, то максимум H может достигаться только на концах отрезка изменения управления (за исключением случая, когда $\psi_2 = 0$). Таким образом, оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \psi_2(t), & \psi_2(t) \neq 0 \\ [-1, 1], & \psi_2(t) = 0 \end{cases},$$

где запись $[-1, 1]$ означает, что $u(t)$ в этом случае не определяется из условий принципа максимума.

Из сопряженной системы могут быть найдены $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$:

$$\psi_1(t) = c; \quad \psi_2(t) = -ct + d.$$

Кроме того, $\lambda_0 = \psi_2 u\,|_{t=T}$. Видно, что в зависимости от значений постоянных интегрирования c и d может иметь место несколько различных типов поведения $\psi_2(t)$:

а) $c \equiv 0$. В этом случае $\psi_2(t) = d$. Тогда $u^*(t) = \operatorname{sgn} d$ постоянна на $[0, T]$;

б) $c > 0$. Тогда $\psi_2(t)$ – убывающая линейная функция. При этом знак $\psi_2(t)$ может изменяться не более одного раза, причем только с '+' на '–'. Таким образом,

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau) \\ -1, & t \in (\tau, T\,] \end{cases}, \tag{2.14}$$

где $\tau \in [0, T]$ – момент переключения управления. $u(\tau)$ может быть определено произвольным образом, так как переопределение функции в одной точке не повлияет на значение интегрального функционала;

в) $c < 0$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получим, что оптимальное управление может иметь вид:

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \tau) \\ 1, & t \in (\tau, T\,] \end{cases}. \tag{2.15}$$

Вырожденный случай возможен только при $\psi_2(T) = 0$. Это происходит, когда начальные состояния $(x(0), v(0))$ переводятся в точку $(0, 0)$ управ-

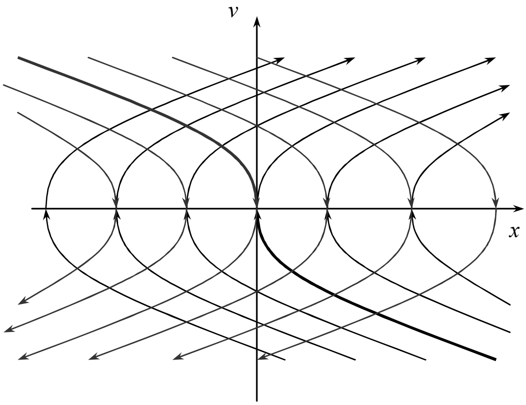

Рис. 2.4

лением $u^* \equiv +1$ или $u^* \equiv -1$.

Таким образом, выделены все возможные типы управлений при различных значениях сопряженных функций. Рассмотрим теперь поведение системы для этих управлений:

а) $u(t) = 1$. Тогда основная система имеет вид

$$\dot{x} = v; \quad \dot{v} = 1,$$

откуда получаем

$$v(t) = t + c_1; \quad x(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2.$$

Построим фазовую диаграмму поведения системы. Для этого выразим $x(t)$ через $v(t)$:

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 = (\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_1^2) - c_1^2 + c_2 = \frac{1}{2} v(t)^2 + d_1.$$

Таким образом, возможные фазовые траектории системы в этом случае представляют собой семейство квадратичных парабол, ориентированных вправо (см. рис. 2.4).

Движение системы вдоль этих траекторий будет происходить снизу вверх, т.к. v – возрастающая функция от t.

Видно, что достижение конечной точки (0, 0) при помощи управления $u(t) \equiv 1$ возможно только для некоторых начальных условий, а именно точек, лежащих на нижней ветви параболы $x_0 = \frac{1}{2} v_0^2$ (выделена жирным на рис. 2.4);

б) $u(t) = -1$. В этом случае

$$\dot{x} = v; \quad \dot{v} = -1,$$

$$v(t) = -t + c_3; \quad x(t) = -\frac{t^2}{2} + c_3 t + c_4.$$

Выражая $x(t)$ через $v(t)$ аналогично предыдущему случаю, получаем

$$x(t) = -\frac{t^2}{2} + c_3 t + c_4 = -\left(\frac{t^2}{2} - c_3 t + c_3^2\right) + c_3^2 + c_4 = -\frac{1}{2} v(t)^2 + d_2.$$

Фазовые траектории системы при $u(t) = -1$ представляют семейство квадратичных парабол, ориентированных влево, движение вдоль траекторий происходит сверху вниз. Достижение конечной точки при $u(t) \equiv -1$ возможно только для точек, лежащих на верхней ветви параболы $x_0 = -\frac{1}{2} v_0^2$.

Таким образом, для точек, лежащих на *линии переключения*

$$x_0 = \begin{cases} \frac{1}{2} v_0^2, & v_0 \le 0 \\ -\frac{1}{2} v_0^2, & v_0 > 0 \end{cases}$$

оптимальное управление будет постоянным на всем отрезке $[0, T]$: $u^*(t) \equiv \operatorname{sgn} x_0$. Здесь мы имеем вырожденный случай $\lambda_0 = 0$.

Для точек, лежащих над данной кривой, оптимальное управление имеет вид (2.15). Действительно, в противном случае система будет перемещаться под действием управления $u(t) = 1$ вправо вверх и никогда не достигнет начала координат.

Аналогично для точек, лежащих ниже линии переключения управление будет иметь вид (2.14).

Определим момент переключения управления τ. Пусть начальное состояние (x_0, v_0) находилось над линией переключения (см. рис. 2.5). Тогда траектория движения системы на отрезке времени $[0, \tau]$ описывается уравнениями

$$v(t) = v_0 - t; \quad x(t) = -\frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0.$$

С другой стороны, на отрезке $[\tau, T]$ система движется под действием управления $u(t) = 1$ и конечное ее состояние равно $(0, 0)$. Тогда

$$v(t) = t - T; \quad x(t) = \frac{t^2 + T^2}{2} - Tt.$$

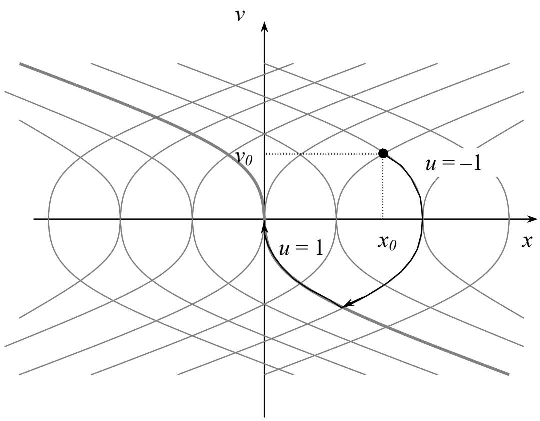

Рис. 2.5

Из условий непрерывности фазовой траектории в момент времени τ

$$v_0 - \tau = \tau - T; \quad -\frac{\tau^2}{2} + v_0\tau + x_0 = \frac{\tau^2 + T^2}{2} - T\tau.$$

Решая эту систему относительно переменных τ и T, получаем

$$\tau = v_0 + \sqrt{\frac{v_0^2}{2} + x_0}\,; \quad T = v_0 + 2\sqrt{\frac{v_0^2}{2} + x_0}\,.$$

Моменты переключения и окончания управления для начальных условий, лежащих ниже линии переключения, определяются аналогичным образом.

II. Приведем также решение, использующее функцию Лагранжа. В рассматриваемой задаче она имеет следующий вид:

$$\mathfrak{L} = \int_0^T \psi_1(t)(v - \dot{x}) + \psi_2(t)(u - \dot{v})dt - \lambda_0 T + \lambda_1(x(0) - x_0) +$$

$$+\lambda_2(v(0) - v_0) + \lambda_3 x(T) + \lambda_4 v(T)\,.$$

Необходимые условия оптимальности состоят в том, что найдутся числа $\lambda_0, \ldots, \lambda_4$ и функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ такие, что выполнено:

а) уравнение Эйлера для подынтегральной части функции Лагранжа $L = \psi_1(t)(v - \dot{x}) + \psi_2(t)(u - \dot{v})$:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0\,; \quad -\frac{d}{dt}L_{\dot{v}} + L_v = 0\,,$$

что приводит к сопряженной системе

$$\dot{\psi}_1 = 0; \quad \dot{\psi}_2 + \psi_1 = 0.$$

Условия трансверсальности по x для терминанта

$\Phi(x(0),x(T),v(0),v(T),T) = -\lambda_0 T + \lambda_1(x(0)-x_0) + \lambda_2(v(0)-v_0) + \lambda_3 x(T) + \lambda_4 v(T)$:

$$\psi_1(0) = -\lambda_1 \Phi'_{x(0)} = -\lambda_1;\ \ \psi_1(T) = -\lambda_3 \Phi'_{x(T)} = -\lambda_3;$$

$$\psi_2(0) = -\lambda_2 \Phi'_{v(0)} = -\lambda_2;\ \ \psi_2(T) = -\lambda_4 \Phi'_{v(T)} = -\lambda_4;$$

б) оптимальность функции L по u (выписаны только слагаемые, зависящие от u):

$$\max_{u\in[-1,1]}\{\psi_2(t)u\} \qquad \Rightarrow \qquad u^*(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\psi_2(t), & \psi_2(t)\neq 0 \\ [-1,1], & \psi_2(t)=0 \end{cases};$$

в) Стационарность функции Лагранжа по T:

$$\mathfrak{L}'_T = 0 \quad \Rightarrow -\lambda_0 T + \lambda_3 \dot{x}(T) + \lambda_4 \dot{v}(T) = 0.$$

Видно, что условия (а) и (б) соответствуют условиям принципа максимума и приводят к аналогичным решениям. Условие (в) возникает для задач с нефиксированным временем окончания процесса и представляет собой дополнительное уравнение для определения оптимального T.

6. Еще одна модель поведения потребителя. Рассматривается динамическая модель потребителя, максимизирующего дисконтированную полезность от потребления *U(c)* на фиксированном отрезке времени $[0, T]$:

$$\max \int_0^T U(c)e^{-\beta t}\,dt. \tag{2.16}$$

Выбор потребления c подчиняется бюджетному ограничению

$$\dot{k} + \dot{b} + c = f(k) + rb, \quad t\in[0, T] \tag{2.17}$$

при граничных условиях $k_0 + b_0 = W_0$ и условии на правом конце

$$k(T) + b(T) \geq W_T, \tag{2.18}$$

где T, r и β –фиксированные положительные числа.

Дифференциальное ограничение (2.17), записанное в реальных переменных, означает, что в каждый момент времени потребитель выбирает, куда вкладывать выпуск производства $f(k)$, которым он владеет: инвестировать в капитал $\dot{k}$, инвестировать в актив $\dot{b}$, приносящий поток процентного дохода rb, или пустить в потребление c. В начале планового периода реальное богатство потребителя (k_0 + b_0) составляет W_0, а в конце потребитель хочет, чтобы его реальное богатство ($k(T) + b(T)$) было не меньше определенной величины W_T. Предполагается, что функции U и f определены на $\mathbb{R}_+$, дифференцируемы, причем $U'(0) = f'(0) = \infty$, вогнуты и монотонно возрастают.

Р е ш е н и е . Проанализируем эту задачу, как задачу оптимального управления, с помощью принципа максимума. Для этого приведем ограничение (2.17) к нормальной форме, введя новую переменную $u = \dot{k}$.

Тогда дифференциальные связи будут иметь вид

$$\dot{k} = u,$$
$$\dot{b} = f(k) + rb - c - u.$$

Как фазовые координаты k и b (запас капитала и актива), так и управления c и u, являются неизвестными функциями времени.

Рассмотрим случай, когда на изменение c и u не накладывается никаких ограничений. По смыслу задачи c не может быть отрицательным, т.к. в этом случае не определена полезность потребителя U. Отрицательное же u допустимо и соответствует проеданию имеющегося у потребителя капитала. Предположим, что решение задачи в этом случае существует.

Запишем функцию Понтрягина:

$$H = \psi_0 U(c)e^{-\beta t} + \psi_1 u + \psi_2 (f(k) + rb - c - u).$$

Тогда сопряженная система имеет вид

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2 f'(k), \qquad \dot{\psi}_2 = -\psi_2 r.$$

Максимизируя H по c и u, получаем уравнения

$$\psi_0 U'(c)e^{-\beta t} = \psi_2, \qquad \psi_1 = \psi_2 \tag{2.19}$$

(здесь мы воспользовались существованием решения).

Отсюда следует, что $\psi_0 \neq 0$ (обратное приводит к обнулению вектора $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2)$, что противоречит предположению о существовании решения и принципу максимума). Так как вектор ψ определен в условиях оптимальности с точностью до положительного множителя, то можно положить $\psi_0 = 1$. Кроме того, так как $U' > 0$, заключаем, что $\psi_1 = \psi_2 > 0$. Из сопряженной системы получаем, что

$$f'(k(t)) = r \quad \forall\ t \in [0, T], \tag{2.20}$$

откуда находим $k(t) \equiv k^*$.

Сопряженная система сводится к одному уравнению

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_1 r,$$

которое имеет решение $\psi_1(t) = \psi_2(t) = \psi_1(0)\, e^{-rt}$. Тогда

$$U'_c = \psi_1(0)\, e^{(\beta - r)t},$$

откуда можно выразить $c = C(t,\ \psi_1(0))$.

Заметим, что из вогнутости функции U следует, что c убывает, если $\beta > r$, и возрастает, если $\beta < r$.

Ограничения на левом и правом концах дают нам условия трансверсальности:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \text{ и } \psi_1(T) = \psi_2(T),$$

указывающие, что вектор $(\psi_1(T), \psi_2(T))$ должен быть коллинеарен градиенту ограничения $k(T) + b(T) \geq W_T$. Это равенство уже обеспечено условиями (2.19).

Кроме того, так как $\psi_i > 0$, то из условия дополняющей нежесткости на правом конце следует, что концевое ограничение выполняется со знаком равенства:

$$k(T) + b(T) = k^* + b(T) = W_T .$$

Тогда значения актива $b(t)$ на концах интервала планирования составят:

$$b(0) = W_0 - k^*, \quad b(T) = W_T - k^* .$$

Полученные значения $b(0)$ и $b(T)$ позволяют найти неизвестную величину $\psi_1(0)$. Для этого рассмотрим исходное ограничение задачи:

$$\dot{b} = rb + [f(k_0) - C(t,\ \psi_1(0)],\ \ b(0) = W_0 - k^* . \qquad (2.21)$$

Проинтегрируем его от 0 до t:

$$b(t) = e^{rt}\,(W_0 - k^* + \int_0^t [f(k_0) - C(\tau,\ \psi_1(0)]d\tau.$$

При $t = T$ получаем соотношение для нахождения $\psi_1(0)$:

$$\int_0^T [f(k_0) - C(t, \psi_1(0)]\ e^{-rt} d\tau = (W_T - k^*)e^{-rt} - (W_0 - k^*). \qquad (2.22)$$

Затем находим $c(t) = C(t, \psi_1(0))$ и $b(t)$ по формуле (2.21).

Мы установили, что $c(t)$ ведет себя монотонно. Осталось исследовать поведение функции $b(t)$. Обозначим $A(t) = f(k_0) - c(t)$.

Предположим, что функция $b(t)$ имеет стационарную точку t^*: $\dot{b}\,(t^*) = 0$. Выясним характер экстремума в точке t^*. Вычислим ее первую и вторую производные:

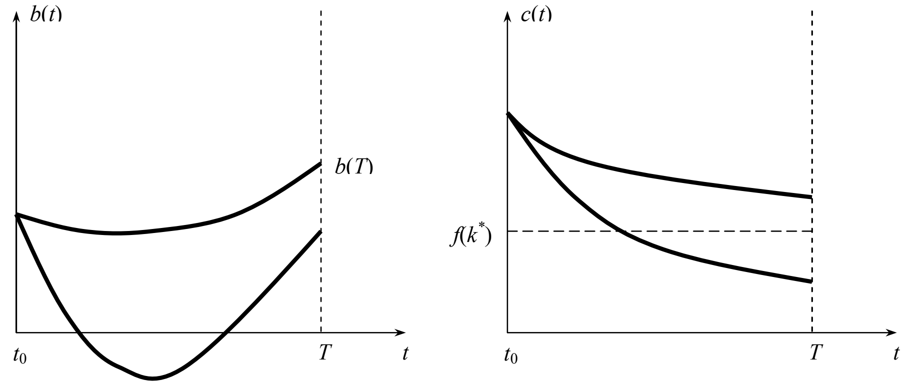

Рис. 2.6. Случай $\beta > r$

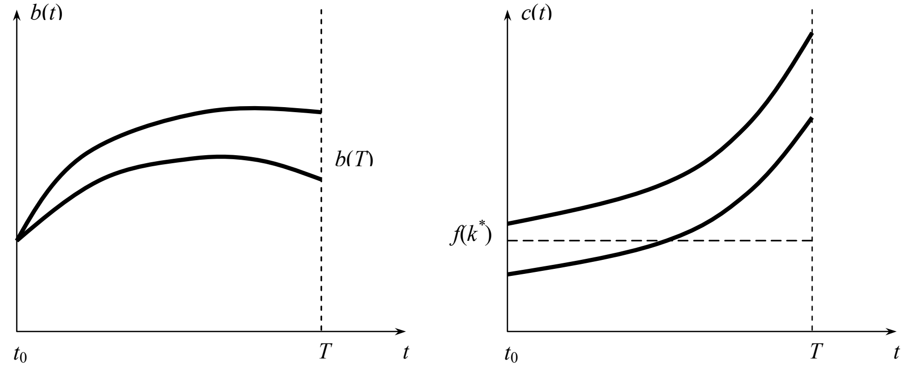

Рис. 2.7. Случай $\beta < r$

$$\dot{b}\,(t^*) = r\, e^{rt^*} [\, b_0 + \int_0^{t^*} A(t)\, e^{-rt}\, dt\,] + A(t^*) = 0,$$

$$\ddot{b}\,(t^*) = r^2\, e^{rt^*} [b_0 + \int_0^{t^*} A(t)\, e^{-rt}\, dt\,] + \dot{A}\,(t^*) + r\, A(t^*) =$$

$$= -\, r\, A(t^*) + A(t^*) + r\, A(t^*) = \dot{A}\,(t^*).$$

Таким образом, если $\beta > r$, то $c(t)$ убывает, а $A(t)$ возрастает, следовательно, $\ddot{b}\,(t^*) > 0$, т.е. t^* – точка минимума $b(t)$ и, очевидно, единственная. Если же $\beta < r$, то t^* – единственная точка максимума $b(t)$. Если внутри нет стационарной точки, то $b(t)$ изменяется монотонно.

Поведение $b(t)$ изображено на рис. 2.6 и 2.7.

Выписанные выше условия принципа максимума являются необходимыми условиями оптимальности. Их достаточность следует из того, что функция Понтрягина вогнута по совокупности переменных k, b, c, u (вспомним, что ψ_1 и ψ_2 положительны). Это свойство является достаточным условием того, что найденная из принципа максимума экстремаль является решением задачи. В этом случае, если уравнения (2.20) и (2.22) имеют решения, по которым определяются переменные k^*, $b^*(t)$, $c^*(t)$ и $u^*(t)$, то они и представляют собой решение исходной задачи.

7. М о д е л ь п о в е д е н и я п о т р е б и т е л я с о г р а н и ч е н и я м и н а у п р а в л е н и е . Рассматривается та же модель, что и в примере 6:

$$\max \int_0^T U(c)e^{-\beta t}\,dt,$$

$$\dot{k} = u,$$

$$\dot{b} = f(k) + rb - c - u, \quad t \in [0, T].$$

Граничные условия теперь имеют вид

$$k(0) = k_0, \quad b(0) = b_0, \quad k(T) + b(T) \geq W_T,$$

где $k_0 > 0$, $b_0 > 0$, $W_T > k_0 + b_0$.

Задано ограничение на управление u: $|u| \leq 1$, означающее, что рост капитала, как и его преобразование в потребительский продукт, не может быть мгновенным. Для определенности будем считать, что $\beta > r$.

Функция Понтрягина H и сопряженная система имеют тот же вид, что и в предыдущем случае:

$$H = \psi_0 U(c)e^{-\beta t} + \psi_1 u + \psi_2 (f(k) + rb - c - u),$$

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2 f'(k),$$

$$\dot{\psi}_2 = -\psi_2 r.$$

Условие максимума функции H по c и u дает соотношения

$$\psi_0 U'(c)\, e^{-\beta t} = \psi_2,$$

$$(\psi_1 - \psi_2)u \to \max_{u:|u|\leq 1}.$$

Отсюда заключаем, что ψ_0 можно считать равным 1,

$$\psi_2(t) = \psi_2(0)\, e^{-rt}, \quad c = C(t, \psi_2(0)),$$

и, кроме того,

$$u = \operatorname{sgn}(\psi_1 - \psi_2),$$

где при $\psi_1 = \psi_2$ значение $u \in [-1, 1]$.

Условие трансверсальности на правом конце дает $\psi_1(T) = \psi_2(T) \geq 0$, причем, очевидно, неравенство выполняется строго.

Рассмотрим закон изменения разности $(\psi_1(t) - \psi_2(t))$:

$$(\psi_1 \dot{-} \psi_2) = \psi_2(0)\, e^{(\beta - r)t}(r - f'(k(t))). \tag{2.23}$$

Пусть k^* такое, что $r = f'(k^*)$. Покажем, что

- при $k_0 < k^*$ применяется управление $u = 1$, пока $k(t) < k^*$;
- при $k_0 > k^*$ применяется управление $u = -1$, пока $k(t) > k^*$;
- при $k_0 = k^*$ применяется управление $u = 0$, пока $k(t) = k^*$.

Пусть $k_0 < k^*$. Утверждаем, что тогда $\psi_1(0) > \psi_2(0)$. Допустим обратное, т.е. $\psi_1(0) \leq \psi_2(0)$. Так как $f'(k_0) > f'(k^*) = r$, а фазовая переменная $k(t)$ непрерывна, то в окрестности точки $t = 0$ разность $(\psi_1(t) - \psi_2(t))$ убывает в силу (2.23), а $u = -1$. Уменьшение капитала приведет только к дальнейшему уменьшению отрицательной разности $(\psi_1(t) - \psi_2(t))$ и сохранению управления $u = -1$. Такая траектория $(\psi_1(t), \psi_2(t))$, будучи продолженной до $t = T$, не удовлетворяет условию трансверсальности на правом конце: $\psi_1(T) = \psi_2(T)$. Поэтому, если оптимальная траектория существует, а мы это предполагаем, то $\psi_1(0) > \psi_2(0)$. Управление $u = 1$ применяется до тех пор, пока $(\psi_1(t) - \psi_2(t)) > 0$, при этом $(\psi_1(t) - \psi_2(t))$ убывает. Представляются две возможности, согласующиеся с условием трансверсальности: разность достигает нуля либо в момент $t = T$, либо при некотором $t = t^* < T$.

В первом случае получаем экстремаль:

$$k(t) = k_0 + t, \qquad b(t) = e^{rt}(b_0 + \int_0^t [f(k_0 + \tau) - C(\tau, \psi_2(0))]d\tau,$$

где $\psi_2(0)$ находится из условия $b(T) = W_T - (k_0 + T)$.

При этом $k(T) = k_0 + T \leq k^*$. Действительно, если $k(t') = k^*$ при $t' < T$, то на отрезке $[t', T]$ разность $(\psi_1(t) - \psi_2(t))$ возрастет и условие трансверсальности не будет выполнено.

Во втором случае $\psi_1(t^*) = \psi_2(t^*)$, $t^* < T$. Мы утверждаем, что в этот момент и капитал достигает значения $k(t^*) = k_0 + t^* = k^*$. Действительно, это не могло произойти раньше, так как тогда бы изменился на положительный знак скорости $(\psi_1 \dot{-} \psi_2)$ и равенство $\psi_1(t^*) = \psi_2(t^*)$ было бы невозможно. Также не могло это произойти позже (или вовсе не произойти), так как тогда в момент t^* изменится знак разности $(\psi_1(t) - \psi_2(t))$, капитал начнет убывать, увеличивая по абсолютной величине разность и тем самым исключая выполнение равенств $k(t') = k'$ при $t' > t^*$ или $\psi_1(T) = \psi_2(T)$.

Как только достигаются равенства $k_0 + t^* = k^*$, $\psi_1(t^*) = \psi_2(t^*)$, при $t > t^*$ они должны сохраняться. Действительно, если, например, на каком-то интервале, ближайшем к точке t^*, разность $(\psi_1(t) - \psi_2(t)) > 0$, то k вырастет по сравнению с k^* и, значит, $(\dot{\psi_1 - \psi_2}) > 0$ на этом интервале. Возрастание разности будет поддерживать управление $u = 1$, что приведет к еще большему возрастанию разности. В результате будет нарушено условие трансверсальности.

Во втором случае получаем экстремаль, состоящую из двух участков:

$$k(t) = k_0 + t,\ \ b(t) = e^{rt}(b_0 + \int_0^t [f(k_0 + \tau) - C(\tau,\ \psi_2(0))]\, d\tau \ \text{ при } t \in [0, t^*],$$

$$k(t) \equiv k^*,\ \ b(t) = e^{rt}(b(t^*) + \int_{t^*}^t [f(k^*) - C(\tau,\ \psi_2(0))]\, d\tau \ \text{ при } t \in [t^*, T].$$

Неизвестные $\psi_2(0)$ и t^* находятся из условий $k_0 + t^* = k^*$ и $b(T) = b_T$. Неизвестное $\psi_1(0)$ находится из условия $\psi_1(T) = \psi_2(T)$ путем интегрирования уравнения (2.23).

Легко определить, какой из двух случаев реализуется: если $k_0 + T \le k^*$, то имеем экстремаль первого типа, если $k_0 + T > k^*$, то имеем экстремаль второго типа, причем точкой переключения управления с $u = 1$ на $u = 0$ является $t^* = k^* - k_0$.

Аналогичный анализ можно провести для случая $k_0 > k^*$.

Результирующие фазовые траектории $(b(t), k(t))$ приведены на рис. 2.8.

8. Синтез оптимальных управлений.

Рассмотрим задачу

$$\min \int_0^{t_1} (ux + u^2/2)\, dt,$$

$$\dot{x} = -\frac{x}{4} + u, \quad t \in [0, t_1], \quad t_1 = 4\ln 2,$$

$$u\colon |u| \le 1,\ x(0) = x_0,\ x(t_1) \text{ свободно.}$$

Функция Понтрягина H и сопряженная система имеют вид

$$H = \psi_0(ux + u^2/2) + \psi_1(-\frac{x}{4} + u),$$

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_0 u + \psi_1/4, \quad \psi_1(t_1) = 0, \quad \text{где } \psi_0 = const \le 0.$$

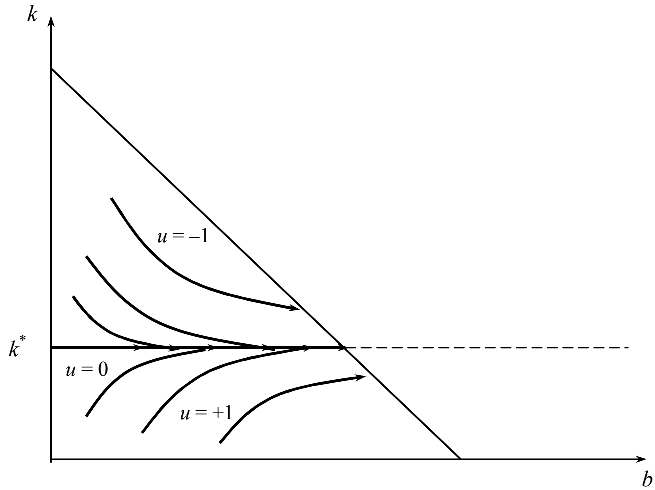

Рис. 2.8

Исследуем вырожденный случай. Если $\psi_0 = 0$, то из сопряженной системы получаем $\psi_1(t) \equiv 0$, что невозможно. Поэтому $\psi_0 < 0$.

Положим далее $\psi_0 = -1$. Условие максимума функции H по u дает соотношение (опустим индекс 1 у ψ_1)

$$-ux - u^2/2 + \psi u \to \max.$$

Получаем, что

$$u = 1, \text{ если } \psi - x \geq 1,$$
$$u = -1, \text{ если } \psi - x \leq -1,$$
$$u = \psi - x, \text{ если } -1 < \psi - x < 1.$$

В частности, при $t = t_1$ условие трансверсальности позволяет разбить терминальное множество $\{(t, x){:}\ t = t_1, x \in R\}$ на три части:

$$A = \{x{:}\ x \leq -1\},\ u(t_1) = +1,$$
$$B = \{x{:}\ x \geq 1\},\ u(t_1) = -1,$$
$$C = \{x{:}\ -1 < x < 1\},\ u(t_1) = -x(t_1).$$

Переключение с одного режима на другой происходит на линиях

$$X_+{:}\ \psi - x = 1 \text{ и } X_-{:}\ \psi - x = -1.$$

Чтобы выписать эти условия и построить линии X_+ и X_-, положим $u = \psi - x$ и проинтегрируем систему

$$\dot\psi = 5\psi/4 - x, \qquad (2.24)$$
$$\dot x = \psi - 5x/4$$

с граничными значениями $x(t_1) = x_1 \in C,\ \psi(t_1) = 0$.

Собственные числа и собственные векторы матрицы системы равны:

$$\lambda_1 = 3/4,\ h_1 = (2,\ 1);\ \lambda_2 = -\,3/4;\ \ h_2 = (1,\ 2).$$

Тогда общее решение системы имеет вид

$$\psi(t) = 2C_1\, e^{3t/4} + C_2\, e^{-3t/4},$$
$$x(t) = C_1\, e^{3t/4} + 2C_2\, e^{-3t/4},$$

откуда с учетом условия трансверсальности получаем

$$\psi(t) = 2C_1\ e^{\frac{3}{4}t}\,(1 -\ e^{\frac{6}{4}(t_1-t)}),$$
$$x(t) = C_1\ e^{\frac{3}{4}t}\,(1 - 4\,e^{\frac{6}{4}(t_1-t)}).$$

Из условия $x(t_1) = x_1$ находим C_1: $C_1 = -\,x_1 e^{-\frac{3}{4}t_1}/3$.

Разность $(\psi - x)$ при этом равна:

$$\psi - x = C_1\, e^{3t/4} + 2C_1\, e^{3t/4}\, e^{\frac{6}{4}(t_1-t)} = -\,x_1 e^{-\frac{3}{4}(t_1-t)}(1 + 2\,e^{\frac{6}{4}(t_1-t)})/3. \qquad (2.25)$$

Обозначим для простоты $z = e^{-\frac{3}{4}(t_1-t)}$ – "новое время". Тогда $z = 1$ при $t = t_1$ и $z = e^{-3\ln 2} = 2^{-3}$ при $t = 0$. Решение для $x(t)$ и для разности $(\psi - x)$ при этом можно записать в виде

$$X = -\,x_1(z - 4z^{-1})/3,$$
$$\psi - x = -\,x_1(z + 2z^{-1})/\,3.$$

Выразим из первого соотношения x_1 и подставим во второе, затем, приравнивая его к (+1) и (–1), получим линии переключения:

$$X_+ = \frac{z^2-4}{z^2+2},\ \ X_- = \frac{4-z^2}{z^2+2}.$$

Как видим, $X_- = -\,X_+$.

Теперь может быть построена картина фазовых траекторий (рис. 2.9).

1. Если $x_1 = 0$, то из системы (2.24) с граничными значениями

$$x(t_1) = 0,\ \psi(t_1) = 0$$

получаем решение $\psi(t) \equiv 0,\ x(t) \equiv 0,\ u(t) \equiv 0$.

2. В зоне C при малых $|x_1|$ малы будут и значения $|X|$, поэтому траектории $x(t)$, выходящие (попятным движением) из точки x_1, не достигают линий переключения X_- и X_+; управление будет определяться из (2.25) как

$$u(t) = -\,x_1(z + 2z^{-1})/3.$$

3. Если значения x_1 лежат в зоне C, но $|x_1|$ достаточно велико, точка пересечения траектории $x(t) = -x_1(z - 4z^{-1})/3$ и линии переключения X_+, например, при $x_1 < 0$, находится из равенства

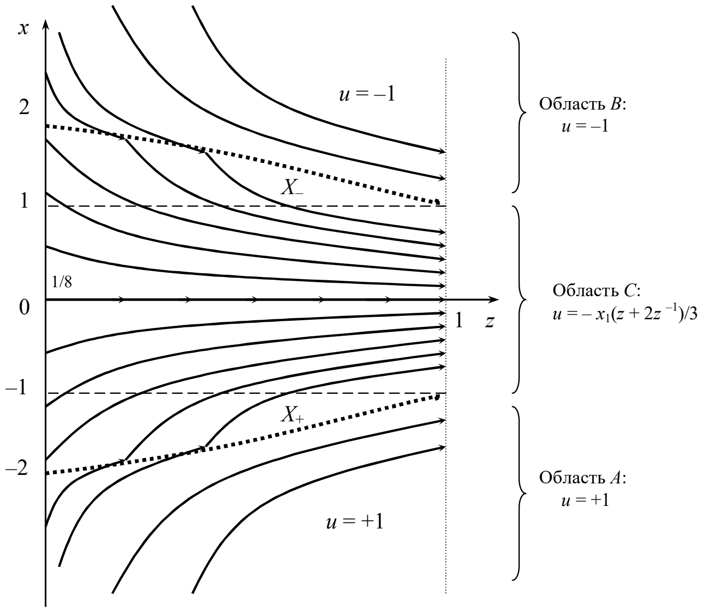

Рис. 2.9

$$-x_1(z^2-4)/3z = (z^2-4)/\,(z^2+2),$$

откуда $z^2 + 3z/x_1 + 2 = 0$. Корни этого уравнения

$$z_{1,2} = -\frac{3}{2x_1} \pm \sqrt{\frac{9}{4x_1^2}-2}\,.$$

Выбор конкретной точки переключения определяется краевым условием. Например, при $x_1 = -1$ допустимой является только $z = 1$. При $x_1 = -0.9$ годится корень $z \sim 0.8$. Знак x_1 определяет знак точки переключения X, а момент z не зависит от знака x_1.

4. Выше и ниже оси z картина симметричная. Переключения имеют только траектории, выходящие из зоны C.
5. Ниже линии X_+ имеем $\psi - x > 1$, откуда $u \equiv +1$. При этом траектории $x(t)$ идут согласно уравнению $\dot{x} = -\dfrac{x}{4} + 1$ до момента переключения или до конца.

   Выше линии X_- $\psi - x < -1$, и там $u \equiv -1$. Траектории идут согласно уравнению $\dot{x} = -\dfrac{x}{4} - 1$ до момента переключения или до конца.

6. Наконец, заметим, что переключение возможно не более одного раза, так как величина ($\psi - x$) монотонна, причем ее производная по времени имеет такой же знак, как и x_1. Например, если $x_1 < 0$ в зоне C и $\psi - x = +1$, то точка находится на линии X_+. Но в силу монотонности ($\psi - x$) становится далее меньше 1, т.е. траектория $x(t)$ остается в области, порождаемой множеством C.

Упражнения

1. Найти оптимальное управление в задачах:

а) $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 - x)dt + x^2(1) \to \min$, краевые условия на траекторию $x(t)$ не заданы.

б) $\int\limits_0^T u^2 dt + T \to \min$; $\dot{x} = u$; $x(0) = 1$; $x(T) = 0$; T не фиксировано.

в) $\int\limits_0^T (1-u)xdt \to \max$; $\dot{x} = (u - \beta)x$; $x(0) = a$; $0 \le u \le 1$; $\beta \le 1$; T фиксировано.

г) $\int\limits_0^T (u^2 + x^2)dt + \dfrac{x^2(T)}{2} \to \min$; $\dot{x} = u - x$; $x(0) = 1$; T фиксировано.

д) $\int\limits_0^T (u - x)^2 dt \to \min$; $\dot{x} = \rho(u - x)$; $x(0) = x_0$; $x(T) = x_1$; T фиксировано.

е) $\int\limits_0^{2\pi} udt + x_2(2\pi) \to \min$; $-1 \le u \le 2$;

$\dot{x}_1 = -x_2$; $\dot{x}_2 = x_1 + u$; $x_1(0) = -2$; $x_2(0) = -1$.

2. В задаче

$$\int\limits_0^2 (2x - 3u - au^2)dt \to \max; \quad \dot{x} = x + u;\ x(0) = 5;\ 0 \le u \le 2$$

исследовать оптимальный процесс при различных значениях параметра $a \in [0, 1]$.

3. Найти оптимальное управление в задаче на быстродействие

$$T \to \min; \quad x(0) = x_{01};\ \dot{x}(0) = x_{02};\ x(T) = 0;\ \dot{x}(T) = 0;\ |u| \le 1,$$

если изменение состояния системы происходит согласно закону:

а) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = u$,

б) $\ddot{x} + \pi^2 x = \pi u$,

в) $\ddot{x} = x + u$.

4. Найти оптимальное потребление $c(t)$ в модели Рамсея в непрерывном времени:

$$\int_0^T e^{-\beta t} U(c) dt \to \max; \quad \dot{s} = \rho s - c;\ s(0) = s_0 > 0;\ s(T) = 0;$$

$$0 \le c \le s;\ \beta < \rho;\ \rho > 1;\ T \text{ фиксировано},$$

если

а) $U(c) = \ln c$,

б) $U(c) = c^{1-\mu}$; $\mu < 1$.

Список литературы

Применению принципа максимума в задачах оптимального управления посвящена обширная литература. В качестве пособий начального уровня по данной теме можно порекомендовать книги:

1. Андреева Е.А., Бенке Х. *Оптимизация управляемых систем.* – Тверь: ТГУ, 1996.

2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. *Оптимальное управление.* – М.: Наука, 1979.

3. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. *Математическая теория конструирования систем управления.* – М.: Высшая школа, 1998.

4. Болтянский В.Г. *Математические методы оптимального управления.* – М.: Наука, 1969.

5. Брайсон А., Хо Ю-Ши *Прикладная теория оптимального управления.* – М.: Мир, 1972.

6. Зубов В.И. *Лекции по теории управления*. – М.: Наука, 1975.

7. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач.* – М.: Наука, 1974.

8. Кротов В.Ф., Гурман В.И. *Методы и задачи оптимального управления*. – М.: Наука, 1973.

9. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. – М.: Наука, 1969.

Большое количество вопросов, связанных с применением теории оптимального управления в моделировании экономических процессов рассматривается в книге

10. Leonard D., Long N. *Optimal control theory and static optimization in economics.* – Cambridge Univ. Press, 1992.

Для более глубокого изучения теории оптимального управления, в частности, не рассматривавшихся в пособии достаточных условий оптимальности, могут быть полезны следующие книги:

11. Гурман В.И. *Принцип расширения в задачах управления.* – М.: Наука, 1985.

12. *Основы теории оптимального управления* / Под ред. В.Ф.Кротова – М.: Высшая школа, 1990.

13. Тер-Крикоров А.М. *Оптимальное управление и математическая экономика.* – М.: Наука, 1977.

§ 3. Фазовые ограничения в задаче оптимального управления

Рассмотрим далее постановку задачи оптимального управления, учитывающую наличие фазовых ограничений. Моменты t_0, t_1, а также начальное состояние x_0 будем считать фиксированными.

Пусть требуется найти максимум функционала:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt + \Phi_0(x(t_1)) \to \max \tag{3.1}$$

при ограничениях

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{3.2}$$

$$g(t, x(t)) \geq 0;\ t \in [t_0, t_1], \tag{3.3}$$

где $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ непрерывно дифференцируема по совокупности аргументов.

Точная формулировка принципа максимума для этой задачи содержит множитель Лагранжа по ограничению (3.3), который является неотрицательной регулярной мерой, сосредоточенной в точках, где оптимальная траектория обращает (3.3) в равенство. Вообще говоря, эта мера может не иметь плотности. Применим следующий эвристический прием.

Выпишем систему условий принципа максимума с функцией плотности $\mu(t)$. Если решение данной системы существует, то необходимые условия выполнены. В противном случае, возможно, мера имеет атомическую или сингулярную составляющие или решения задачи вовсе не существует. Рассмотрим *лагранжиан* данной задачи:

$$\mathfrak{L}(t, x(t), u(t), \psi(t), \mu(t), \lambda_0) = H(t, x(t), u(t), \psi(t), \lambda_0) + (\mu(t), g(t, x(t))), \tag{3.4}$$

где $H(t, x(t), u(t), \psi(t), \lambda_0)$ – функция Понтрягина; $\mu(t) = (\mu_1(t), \ldots, \mu_s(t)) \in \mathbb{R}^n$ – множитель Лагранжа, соответствующий ограничению (3.3) .

Пусть $(x^*(t), u^*(t))$ – оптимальный процесс в задаче (3.1) – (3.3). Тогда найдутся не равные одновременно нулю множитель $\lambda_0 \geq 0$ и вектор-функции $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ и $\mu(t) = (\mu_1(t), \ldots, \mu_s(t)) \in \mathbb{R}^s$, такие, что

а) всюду на $[t_0, t_1]$ выполнено условие принципа максимума:

$$u^*(t) \in \operatorname{Arg\,max} (H(t, x^*(t), u(t), \psi(t), \lambda_0)); \tag{3.5}$$

б) сопряженная функция $\psi(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial L(t, x^*(t), u^*(t), \psi(t), \mu(t), \lambda_0)}{\partial x_i(t)}; \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (3.6)$$

и условиям трансверсальности на правом конце (2.7), имеющим в данной постановке вид

$$\psi_i(t_1) = \lambda_0 \frac{\partial \Phi_0(x^*(t_1))}{\partial x_i(t_1)};$$

в) выполнены условия дополняющей нежесткости и неотрицательности множителя Лагранжа $\mu(t)$:

$$\mu_i(t)\, g_i(t, x(t)) = 0; \quad \mu_i(t) \ge 0; \quad i = 1, \ldots, s. \qquad (3.7)$$

Примеры

1. Найти оптимальное управление в задаче [1]:

$$J(u, x) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u^2 + x^2)dt \to \min;$$

$$\dot{x} = u; \quad x(0) = 1; \quad u \in \mathbb{R};$$

$$x(t) \ge c \quad \forall t \in [0, 1].$$

Решение. При отсутствии фазового ограничения оптимальное управление в данной задаче можно найти, используя принцип максимума для задачи со свободным правым концом, описанный в предыдущем разделе. Оптимальным решением задачи будет:

$$x^*(t) = \frac{e^t + e^{2-t}}{e^2 + 1}; \qquad u^*(t) = \dot{x}^*(\mathrm{t}). \qquad (3.8)$$

Функция $x^*(t)$ монотонно убывает и достигает минимального значения при $t = 1$:

$$x^*(1) = \frac{2e}{e^2 + 1}.$$

Очевидно, что при $c \le \frac{2e}{e^2+1}$ решение задачи с фазовым ограничением будет совпадать с (3.8). Предположим, что $c > \frac{2e}{e^2+1}$. Применим необходимые условия экстремума. Функция Понтрягина в этом случае имеет вид

$$H = -\lambda_0 \frac{u^2 + x^2}{2} + \psi u,$$

а лагранжиан задачи запишется как

$$\mathcal{L} = H + \mu(x - c) = -\lambda_0 \frac{u^2 + x^2}{2} + \psi u + \mu(x - c).$$

Видно, что в вырожденном случае ($\lambda_0 = 0$) функция H является линейной по u, поэтому ее максимум достигается на конечных u только при $\psi(t) \equiv 0$. Но тогда и $\mu \equiv 0$ (в силу (3.6)), что противоречит условиям теоремы. Поэтому далее можно положить $\lambda_0 = 1$.

Из условия (а) теоремы вытекает, что

$$u^*(t) = \psi(t).$$

Сопряженная функция $\psi(t)$ является решением следующего уравнения:

$$\dot{\psi} = x - \mu, \quad \mu \geq 0, \quad \mu(x - c) = 0.$$

Подставляя данные выражения в основную систему, получим, что $x(t)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\ddot{x} = x - \mu, \quad x(0) = 1.$$

Из условия дополняющей нежесткости, при $x(t) > c$ $\mu(t) = 0$ и $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x} = x, \quad x(0) = 1,$$

общим решением которого является

$$x(t) = Ae^{t} + Be^{-t}.$$

Далее, в силу непрерывности сопряженной функции $\psi(t)$, в первой точке контакта траектории $x(t)$ с фазовым ограничением τ выполнено условие

$$\psi(\tau^-) = \psi(\tau^+) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(\tau^-) = \dot{x}(\tau^+) \text{ (так как } u^*(t) = \psi(t)\text{)},$$

откуда следует, что $\dot{x}(\tau) = 0$.

Таким образом, начальное условие, условие выхода на фазовое ограничение и условие непрерывности сопряженной функции дают систему уравнений для определения параметров A, B и τ:

$$x(0) = A + B = 1,$$

$$x(\tau) = Ae^{\tau} + Be^{-\tau} = c,$$

$$\dot{x}(\tau) = Ae^{\tau} - Be^{-\tau} = 0.$$

Решая данную систему, получаем:

$$A = \frac{1 \pm \sqrt{1-c^2}}{2}; \quad B = \frac{1 \mp \sqrt{1-c^2}}{2}; \quad \tau = \ln \frac{c}{1 \pm \sqrt{1-c^2}}.$$

Далее необходимо показать, что, коснувшись ограничения $x(t) = c$, траектория останется на нем.

Заметим, что $\ddot{x} \geq 0$ при всех t. Поэтому траектория $x(t)$ выпукла вниз. Допустим, что она сошла с ограничения. Тогда далее до конца $x(t) > c$, причем правый конец свободен. Следовательно, $\psi(t_1) = 0$. Получаем, что $\psi(\tau) = \psi(t_1) = 0$, тогда как $\psi(t)$ строго возрастает вне ограничения. Данное противоречие показывает, что допущение неверно.

2. Найти оптимальное потребление $c(t)$ в модели Рамсея [3]:

$$J(c, s) = \int_0^T U(c)e^{-\alpha t}dt \to \max; \quad T - \text{фиксировано};$$

$$U' > 0; \quad U'' < 0; \quad U(0) = 0;$$

$$\dot{s} = \rho s - c; \quad s(0) = s_0; \quad s(T) = s_T; \quad c \geq 0$$

при ограничении на величину сбережений $s(t)$:

$$s(t) \geq a > 0; \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Р е ш е н и е . Наряду с функцией Понтрягина задачи, имеющей вид

$$H = \lambda_0 U(c)e^{-\alpha t} + \psi(\rho s - c),$$

выпишем лагранжиан

$$\mathcal{L} = H + \mu(s - a).$$

Функция Понтрягина достигает максимума при конечных значениях $c(t)$ только при $\psi(t) > 0$. Нетрудно видеть, что в этом случае она является вогнутой по $c(t)$ (рис. 3.1) и условие максимума дает следующий вид оптимального управления:

$$c^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } U'(0) \leq \psi(t)e^{\alpha t} \\ (U')^{-1}(\psi(t)e^{\alpha t}), & \text{при } U'(0) > \psi(t)e^{\alpha t} \end{cases}$$

Уравнение для сопряженной переменной имеет вид

$$\dot{\psi} = -\rho\psi - \mu, \quad \mu(s - a) = 0, \quad \mu \geq 0.$$

Так как концы фазовой траектории $s(t)$ закреплены, то граничные условия для $\psi(t)$ неопределены.

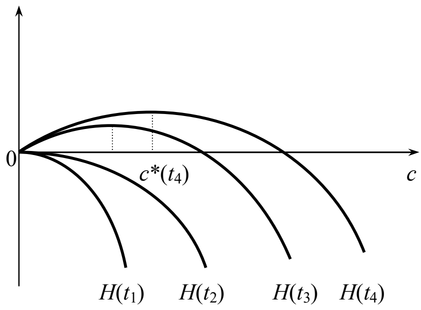

Рис. 3.1

Рассмотрим два случая:

1. Пусть $\alpha < \rho$. Покажем, что в этом случае $s^*(t) > a \ \forall \ t \in [0, T]$.

Предположим, что $s^*(\tau) = a$ для некоторого $\tau \in [0, T]$. Так как $c^*(t)$ непрерывна в точке τ и

$$\dot{s}^* = \rho s^* - c^*,$$

то $s^*(t)$ непрерывно дифференцируема в точке τ. Кроме того, в силу фазового ограничения τ – точка минимума траектории $s^*(t)$ на $[0, T]$, поэтому $\dot{s}^*(\tau) = 0$. Вычислим $\ddot{s}^*(\tau)$:

$$\ddot{s}^*(\tau) = \rho\dot{s}^*(\tau) - \dot{c}^*(\tau) = -\dot{c}^*(\tau),$$

где $\dot{c}^*(\tau)$ может быть найдено из соотношения $U'(c(t)) = \psi(t)e^{\alpha t}$ как

$$\dot{c}^*(\tau) = \frac{-\dot{\psi}(t)e^{\alpha t} - \alpha\psi(t)e^{\alpha t}}{U''(c(t))} = -\frac{\psi(t)(\rho-\alpha)e^{\alpha t} + \mu(t)e^{\alpha t}}{U''(c(t))}. \qquad (3.9)$$

Так как $\alpha < \rho$ и $U'' < 0$, то $\dot{c}^*(\tau) > 0$, откуда следует, что $\ddot{s}^*(\tau) < 0$. Это противоречит тому, что τ – внутренняя точка минимума траектории $s^*(t)$.

Таким образом, при $\alpha < \rho$ траектория $s^*(t)$ не имеет внутренних минимумов, а следовательно, не выходит на фазовое ограничение $s(t) = a$ (рис. 3.2).

2. Рассмотрим теперь случай $\alpha > \rho$. Из (3.9) следует, что в этом случае над ограничением $s(t) = a$ нет внутренних максимумов. Это означает, что $\mu(\tau) = 0$, $\dot{c}^*(\tau) < 0$ и $\ddot{s}^*(\tau) > 0$ в любой точке $\tau \in [0, T]$, такой, что $\dot{s}^*(\tau) = 0$ и $s(t) > a$.

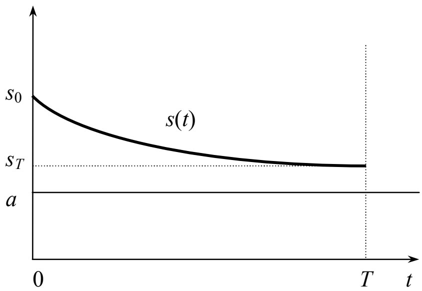

Рис. 3.2

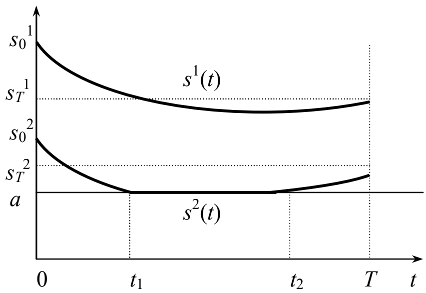

Рис. 3.3

Траектории $s(t)$ в этом случае могут выходить на фазовое ограничение или все время оставаться выше его, описывая выпуклую кривую, в зависимости от начальных условий и T (рис. 3.3).

На отрезке $[t_1, t_2]$ имеем $\dot{s}^*(\tau) = 0$ и $s(t) \equiv a$. Тогда $c(t) \equiv \rho\alpha > 0$.

Из условия максимума H по $c(t)$ нетрудно получить, что

$$U'(\rho\alpha) = \psi(t)e^{\alpha t},$$

откуда

$$\psi(t) = U'(\rho\alpha)e^{-\alpha t}.$$

Тогда

$$\dot{\psi} = -\alpha\, U'(\rho\alpha)e^{-\alpha t}.$$

С другой стороны, из сопряженной системы следует

$$\dot{\psi} = -\rho\psi - \mu = -\rho\, U'(\rho\alpha)e^{-\alpha t} - \mu.$$

Из последних двух равенств получаем выражение для множителя Лагранжа μ:

$$\mu(t) = (\alpha - \rho)\, U'(\rho\alpha)e^{-\alpha t} > 0.$$

Определим далее моменты выхода траектории на фазовое ограничение t_1 и схода с него t_2. Из условий непрерывности фазовой переменной $s(t)$ и сопряженной переменной $\psi(t)$ в точке t_1 имеем

$$s(t_1^-) = s(t_1^+), \qquad \psi(t_1^-) = \psi(t_1^+), \tag{3.10}$$

где $s(t_1^-) = e^{\rho t_1}(s_0 - \int_0^{t_1} e^{-\rho\tau}c(\tau)d\tau) = e^{\rho t_1}(s_0 - \int_0^{t_1} e^{-\rho\tau}(U')^{-1}(\psi_0 e^{(\alpha-\rho)\tau})d\tau)$; $s(t_1^+) = a$; $\psi(t_1^-) = \psi_0 e^{-\rho t_1}$; $\psi(t_1^+) = U'(\rho\alpha)e^{-\alpha t_1}$.

Для определения момента t_2 воспользуемся краевым условием:

$$s(T) = e^{\rho(T-t_2)}\left(a - \int_{t_2}^{T} e^{-\rho\tau}(U')^{-1}(\psi(t_2)e^{(\alpha-\rho)\tau})d\tau\right) = s_T, \qquad (3.11)$$

где $\psi(t_2) = U'(\rho\alpha)e^{-\alpha t_2}$.

Таким образом, соотношения (3.10) и (3.11) позволяют определить все параметры оптимальной траектории $s^*(t)$.

Заметим, что специфика этой простой задачи позволила в явном виде выписать вид сопряженной функции $\psi(t)$ на границе $s(t) = a$, а затем независимо определить параметры ψ_0, t_1 и t_2. Неразрешимость соотношений (3.10) и (3.11) относительно t_1 и t_2 говорит о том, что оптимальная траектория $s^*(t)$, если она существует, не выходит на фазовое ограничение $s(t) = a$, т.е. соответствует случаю $s^1(t)$ на рис. 3.3. В этом случае параметры фазовой траектории отыскиваются аналогично задаче без фазовых ограничений.

Краевое условие будет иметь вид

$$s(T) = e^{\rho(T-t_2)}\left(s_0 - \int_{0}^{T} e^{-\rho\tau}(U')^{-1}(\psi_0 e^{(\alpha-\rho)\tau})d\tau\right) = s_T,$$

откуда может быть получена константа ψ_0.

Подставив ее в выражения для $c^*(t)$ и $s^*(t)$

$$c^*(t) = (U')^{-1}(\psi_0 e^{(\alpha-\rho)t});$$

$$s^*(t) = e^{\rho t}\left(s_0 - \int_{0}^{T} e^{-\rho\tau} c^*(\tau)d\tau\right),$$

получим явный вид оптимального процесса.

Если задача нахождения ψ_0 в данном случае неразрешима, то исходная задача также является неразрешимой, например, если отсутствуют допустимые траектории, переводящие систему из состояния s_0 в s_T.

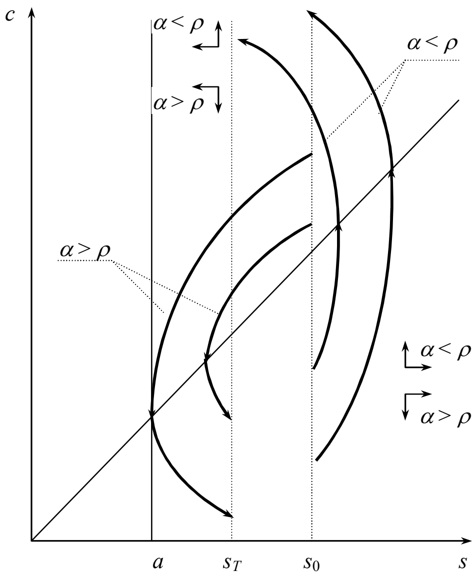

Рис. 3.4

Построим фазовый портрет движения системы в осях (s, c). Для этого воспользуемся выражением (3.9) для $\dot{c}(t)$. Подставив в него

$$\psi(t) = U'(c(t))e^{-\alpha t},$$

получим

$$\dot{c}(t) = \frac{(\alpha - \rho)U'(c(t)) - \mu(t)e^{\alpha t}}{U''(c(t))}; \quad \dot{s}(t) = \rho s(t) - c(t).$$

На рис. 3.4 приведены соответствующие данной системе фазовые траектории.

Упражнения

1. Определить минимум функционала

$$J(u, x) = \int_0^3 2x_1 dt,$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 0, \quad |u| \le 2$$

при фазовом ограничении

$$x_1(t) \ge \alpha, \quad \alpha \le 0.$$

2. Найти максимум функционала

$$J(u, x) = -\int_0^3 x dt,$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad x(3) = 1, \quad |u| \le 1$$

при фазовом ограничении

$$x(t) \ge 0.$$

3. Проанализировать с помощью принципа максимума с фазовыми ограничениями, а также построить и прокомментировать фазовые диаграммы в координатах (s, c) для следующей задачи оптимального управления:

$$J(c, s) = \int_0^T \ln(1 + c)e^{-\beta t} dt \to \max, \quad T \text{ фиксировано},$$

$$\dot{s} = \rho s - c, \quad s(0) = s_0, \quad s(T) = s_T, \quad c \ge 0, \quad s \ge a > 0.$$

Рассмотреть случаи $\beta > \rho$ и $\rho > \beta$.

Список литературы

Базовые сведения о теории задач оптимального управления с фазовыми ограничениями приведены в книгах

1. Андреева Е.А., Бенке Х. *Оптимизация управляемых систем.* – Тверь: ТГУ, 1996.
2. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. *Математическая теория конструирования систем управления.* – М.: Высшая школа, 1998.
3. Беленький В.З. *Оптимальное управление: принцип максимума и динамическое программирование.* – М.: РЭШ, 2001.
4. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач.* – М.: Наука, 1974.
5. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А., Левин В.Л. *Методы теории экстремальных задач в экономике*. – М.: Наука, 1981.

Применение методов решения задач оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями к проблемам математической экономики изложено в книге

6. Тер-Крикоров А.М. *Оптимальное управление и математическая экономика.* – М.: Наука, 1977.

§ 4. Особые управления

При отыскании оптимального управления с использованием принципа максимума оно определялось из условия максимизации функции H по u. Однако в ряде случаев максимум функции H может достигаться в более чем одной точке множества допустимых управлений U для некоторого интервала времени.

При этом могут возникнуть особые оптимальные управления, которые нельзя определить, используя только условия принципа максимума, и требуется привлекать дополнительные условия оптимальности.

Рассмотрим динамическую систему, линейную по управлению:

$$\dot{x} = f_0(x(t)) + f_1(x(t))\, u, \qquad x(0) = x_0,$$
$$t \in [0, T], \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad u \in U \subseteq \mathbb{R}^1, \tag{4.1}$$

с критерием качества

$$J(u) = \varphi(x(T)) \to \min. \tag{4.2}$$

Соотношения принципа максимума для данной задачи имеют вид

$$H(x, u, \psi) = (\psi, f_0(x(t))) + (\psi, f_1(x(t)))\, u \to \max,$$
$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left(\frac{\partial f_0(x)}{\partial x} + \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} u,\ \psi\right), \qquad t \in [0, T], \tag{4.3}$$
$$\psi(T) = -\frac{\partial \varphi(x(T))}{\partial x(T)}.$$

О п р е д е л е н и е . Пусть $U_1 \subseteq U$ – множество, состоящее более чем из одной точки, такое, что на промежутке времени $[t_1, t_2]$ выполнено условие

$$\forall v \in U_1 \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad H(x(t), v, \psi(t)) = \max_{u \in U} H(x(t), u, \psi(t)). \tag{4.4}$$

Тогда промежуток времени $[t_1, t_2]$ называется *промежутком особого режима*, управление $u(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ – *особым управлением*, а траектория $x(t)$ – *траекторией особого режима*.

Из (5.4) получаем:

$$H_1 = \frac{\partial H}{\partial u}(x(t), u, \psi(t)) = (\psi, f_1(x(t))) = 0, \ \forall u \in U_1 \ \ \forall t \in [t_1, t_2].$$

Тогда полные производные функции H_1 по времени вдоль особого режима на отрезке $[t_1, t_2]$ также будут тождественно равны нулю.

Будем вычислять полные производные по времени функции H_1 в силу системы (4.3) до тех пор, пока в одной из них не появится зависимость от u. Тогда u, обращающее соответствующую производную в 0, и будет являться особым управлением.

В данном случае производные могут быть найдены с использованием скобок Пуассона:

$$\{H_0, H_1\} = (\frac{\partial H_0}{\partial x}, \frac{\partial H_1}{\partial \psi}) - (\frac{\partial H_0}{\partial \psi}, \frac{\partial H_1}{\partial x}).$$

Тогда

$$\frac{dH_1}{dt} = -\{H_0, H_1\}, \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Это выражение не содержит управления. Рассмотрим вторую производную:

$$\frac{d^2 H_1}{dt^2} = \{H_0, \{H_0, H_1\}\} + \{H_1, \{H_0, H_1\}\}u \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Зависимость от управления имеет место, если $\{H_1, \{H_0, H_1\}\} \neq 0$. В этом случае управление $u(t)$, обращающее $\frac{d^2 H_1}{dt^2}$ в нуль, имеет вид

$$u(t) = \frac{\{H_0, \{H_0, H_1\}\}}{\{H_1, \{H_0, H_1\}\}}. \tag{4.5}$$

В противном случае необходимо найти следующие полные производные функции H_1 в силу системы (4.3). При этом оказывается, что управление $u(t)$ может присутствовать только в производных четного порядка, имеющих вид

$$\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} H_1 = \{H_0, \{H_0, \ldots, \{H_0, H_1\}\ldots\}\} +$$

$$+ \{H_1, \{H_0, \ldots, \{H_0, H_1\}\ldots\}\}u \quad \forall t \in [t_1, t_2], \tag{4.6}$$

откуда аналогично (4.5) может быть определено особое управление.

Изучим вопрос об оптимальности особых управлений. При наличии особого управления условия принципа максимума, основанные на анализе первой вариации критериального функционала $J(u)$, не позволяют выделить единственное решение. Поэтому они усиливаются требованием неотрицательности второй вариации функционала $J(u)$. Для задачи (4.1) – (4.2) эти условия имеют следующий вид.

Т е о р е м а . Пусть $u_0(t)$ – оптимальное особое управление в задаче (4.1) – (4.2), причем функции f_0, f_1 непрерывно дифференцируемы не менее $(2l + 1)$ раз, где $l \geq 1$, и вдоль управления $u(t)$ выполнены равенства

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\frac{\partial H}{\partial u}\right) = 0, \quad k = 0,\ldots, l-1. \tag{4.7}$$

Тогда для оптимальности управления $u_0(t)$ необходимо выполнение при этом управлении неравенства

$$(-1)^l \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^{2l}}{dt^{2l}}\frac{\partial H}{\partial u}\right) \leq 0, \quad k = 0,\ldots, l-1. \tag{4.8}$$

При $l = 1$ условия (4.7) – (4.8) переходят в *необходимое условие Келли оптимальности особых управлений*:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial u}\right) \geq 0.$$

При $l = 2$ из (4.7) – (4.8) получаются *необходимые условия Коппа-Мойера*:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial u}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^4}{dt^4}\frac{\partial H}{\partial u}\right) \leq 0.$$

Примеры

1. Найти особое управление в задаче

$$J(u) = x_3(1) \to \min,$$

$$\dot x_1 = x_2, \quad \dot x_2 = u, \quad \dot x_3 = -x_1^2,$$

$$t \in [0, 1], \quad u \in [-1, 1]$$

и исследовать его на оптимальность.

Р е ш е н и е . Функция H в данной задаче имеет вид

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u - \psi_3 x_1^2.$$

Сопряженная система:

$$\dot\psi_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 2\psi_3 x_1, \quad \dot\psi_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \quad \dot\psi_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0,$$

$$\psi_1(1) = 0, \quad \psi_2(1) = 0, \quad \psi_3(1) = -1.$$

$$H_1 = \frac{\partial H}{\partial u} = \psi_2.$$

Для определения особого управления будем последовательно вычислять полные производные по времени функции H_1 в силу системы, до тех пор, пока впервые не появится зависимость от управления u:

$$\frac{dH_1}{dt} = \dot\psi_2 = -\psi_1; \qquad \frac{d^2H_1}{dt^2} = \ddot\psi_2 = -\dot\psi_1 = -2\psi_3 x_1;$$

$$\frac{d^3H_1}{dt^3} = -2(\dot\psi_3 x_1 + \psi_3 \dot x_1) = -2\psi_3 x_2; \tag{4.9}$$

$$\frac{d^4H_1}{dt^4} = -2(\dot\psi_3 x_2 + \psi_3 \dot x_2) = -2\psi_3 u.$$

Из сопряженной системы $\psi_3(t) \equiv -1$, откуда получаем, что особое управление $u(t) = 0$. При этом $x_i(t) = 0$, $i = 1, 2, 3$; $\psi_1(t) = \psi_2(t) = 0$, $t \in [0, 1]$, т.е. H не зависит от управления $u(t)$.

Условие Келли для данной задачи выполнено, так как

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^2H_1}{dt^2} = 0,$$

поэтому сделать вывод о неоптимальности особого управления $u(t) = 0$ нельзя.

Условие Коппа-Мойера не выполнено, так как

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^4H_1}{dt^4} = -2\psi_3 = 2 > 0.$$

Отсюда следует, что особое управление $u(t) = 0$ не является оптимальным.

2. Найти особое управление в задаче управления автономной линейной системой с квадратичным критерием качества [1]:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T x_1^2\,dt \to \min,$$

$$\dot x_1 = x_2 + u, \quad \dot x_2 = -u, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0,$$

$$t \in [0, T], \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Р е ш е н и е . Данная задача является линейной по u, но нелинейна по x_1 в силу выбранного критерия качества.

Гамильтониан задачи:

$$H = -\frac{1}{2}x_1^2 + \psi_1(x_2 + u) - \psi_2 u,$$

сопряженная система:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = x_1, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1.$$

Особыми участками в этой задаче являются такие, что на некотором интервале времени

$$H_1 = \frac{\partial H}{\partial u} = \psi_1 - \psi_2 = 0.$$

На данном интервале выполнено:

$$\frac{dH_1}{dt} = \dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2 = x_1 + \psi_1 = 0. \tag{4.10}$$

Так как гамильтониан задачи не зависит явно от t, то на оптимальном решении он должен быть постоянным. Тогда, учитывая (4.10), получим

$$H = -\frac{1}{2}x_1^2 + \psi_1 x_2 + (\psi_1 - \psi_2)\, u = -\frac{1}{2}x_1^2 - x_1 x_2 = const,$$

что соответствует однопараметрическому семейству особых участков (гипербол).

Найдем вторую полную производную по времени:

$$\frac{d^2 H_1}{dt^2} = \dot{x}_1 + \dot{\psi}_1 = x_2 + u + x_1 = 0.$$

Тогда закон управления на особом участке имеет вид

$$u^0 = -(x_1 + x_2),$$

т.е. является линейным.

Проверим условие Келли:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^2 H_1}{dt^2} = 1 > 0,$$

т.е. сделать вывод о неоптимальности особого управления в данной задаче нельзя.

Если управление u не ограничено, то, используя в качестве управлений δ-функции, можно мгновенно изменять состояние системы вдоль прямых

$$x_1 + x_2 = const.$$

При этом положительные импульсы переводят состояние вправо-вниз, отрицательные – влево-вверх. Такие перемещения не изменяют критерий качества, так как u не входит в его выражение.

На особом участке, используя выражение для u^0, получаем

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2,$$

откуда

$$x_1 = c\, e^{-t}.$$

Таким образом, типичное экстремальное решение включает начальный импульс, переводящий начальное состояние на особый участок, движение вдоль особого участка до прямой $x_1 + x_2 = 0$ и второй импульс, переводящий состояние в начало координат (рис. 4.1).

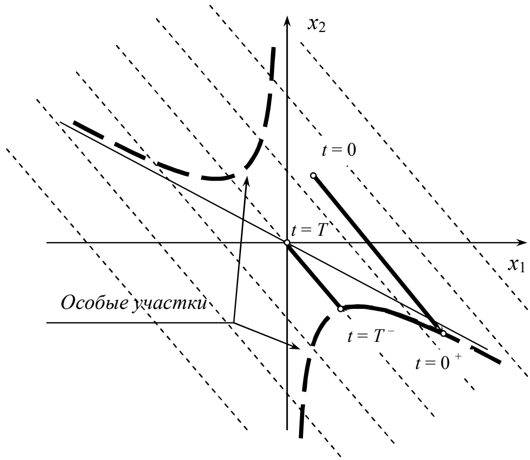

Рис. 4.1

Значение функции H, выделяющее конкретный особый участок из однопараметрического семейства возможных, определяется из условия, что в момент $t = T$ состояние должно быть таким, что $x_1 + x_2 = 0$:

$$H = -\,2c^2 \frac{e^{-2T}}{1-e^{-2T}},$$

где $c = x_1(0) + x_2(0)$.

3. Найти особое управление в задаче управления автономной линейной системой общего вида с квадратичным критерием качества [1]:

$$J(u) = \frac{1}{2} x(T)'\, S\, x(T) + \frac{1}{2}\int_0^T x(t)' A x(t) dt \to \min,$$

$$\dot{x} = Fx + Gu, \quad x(0) - \text{задано}, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n,$$

$$t \in [0, T], \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

где A, F, G, S – постоянные матрицы, операция " $'$ " обозначает транспонирование.

Р е ш е н и е . Запишем гамильтониан задачи:

$$H = -\frac{1}{2} x' A\, x + \psi' (Fx + Gu).$$

Аналогично предыдущему случаю, в силу независимости H от t, на оптимальном решении

$$H = \text{const}. \tag{4.11}$$

Сопряженная система:

$$\dot{\psi}\,' = -\,\psi' F + x'A, \qquad \psi(T) = -\,S\,x(T). \tag{4.12}$$

Условия особого управления:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi' G = 0, \tag{4.13}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = -\,\dot{\psi}\,' G = -\,(\psi' F - x'A)G = 0, \tag{4.14}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = (\psi' F - x'A)FG + (x'F' + u'G')AG = 0,$$

откуда

$$u^0 = -\,(G'AG)^{-1}G'((AF - F'A)x - F'F'\psi). \tag{4.15}$$

Условия (4.11) – (4.14) содержат $2m + 1$ уравнений, определяющих в $2n$-мерном пространстве фазовых и сопряженных переменных (x, ψ) семейство возможных особых участков, а уравнение (4.15) задает линейный закон управления, имеющий место на особом участке.

Если матрица A положительно определенная, то для данной задачи выполняется необходимое условие Келли оптимальности особого управления:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial u}\right) = G'AG \geq 0.$$

Упражнения

1. Найти особое управление в задаче

$$J(u) = x_3(1) \to \max,$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad \dot{x}_3 = -\,x_1^2,$$

$$t \in [0, 1], \quad u \in [-1, 1]$$

и исследовать его на оптимальность.

2. Определить особое управление в задаче управления автономной линейной системой с квадратичным критерием качества (пример 3), если $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^1$ и соответствующие матрицы равны

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Список литературы

1. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. *Математическая теория конструирования систем управления.* – М.: Высшая школа, 1998.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Особые оптимальные управления.* – М.: Наука, 1973.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Методы оптимизации.* – Минск: Изд-во БГУ, 1981.

§ 5. Динамическое программирование и уравнение Беллмана

Принцип Беллмана дает достаточные условия оптимальности процесса в задаче оптимального управления. Он базируется на следующем ключевом факте:

если кривая $x^*(t)$ является оптимальной траекторией в задаче управления динамической системой на отрезке времени $[t_0, T]$, с некоторым начальным условием $x(t_0) = x_0$, то для любого момента времени $\tau \in [t_0, T]$ оптимальным решением задачи управления системой на отрезке времени $[\tau, T]$ с начальным условием $x(\tau) = x^*(\tau)$ будет являться участок той же самой траектории $x^*(t)$ (см. рис. 5.1).

Рассмотрим задачу оптимального управления в виде

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt + \Phi_0(t_1, x(t_1)) \to \max, \tag{5.1}$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{5.2}$$

$$u(t) \in U_t, \tag{5.3}$$

и пусть J^* – значение функционала на оптимальном ее решении ($x^*(t)$, $u^*(t)$).

Теперь для произвольного момента времени $\tau \in [t_0, T]$ и произвольной точки фазового пространства y положим в задаче (5.1) – (5.3) $t_0 = \tau$, $x(\tau) = y$. Функцию $J^*(\tau, y)$, равную значению функционала на оптимальном решении такой задачи, будем называть *функцией Беллмана* или *функцией выигрыша*.

Отметим, что $J^* = J^*(t_0, x_0)$.

Исследуем теперь изменение функции $J^*(t, x)$ с течением времени вдоль оптимальной траектории системы, т.е. при $x = x^*(t)$.

Рассмотрим малое приращение времени dt. За это время система перейдет в новое состояние

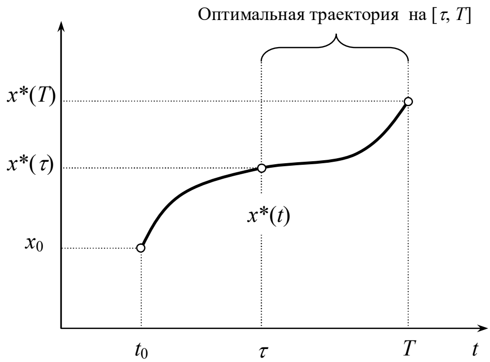

Рис. 5.1

$$x^*(t + dt) \approx x^*(t) + dx^*(t),$$

где, из (5.2),

$$dx^*(t) = f(t, x^*(t), u^*(t))dt.$$

Изменение значения функционала (5.1) на отрезке $[t,\ t + dt]$ может происходить только за счет интегральной его части и приближенно составляет

$$\int_t^{t+dt} F(t, x^*(t), u^*(t))dt \approx F(t, x^*(t), u^*(t))dt,$$

а оставшаяся часть, согласно принципу оптимальности Беллмана, будет равна $J^*(t + dt, x^*(t + dt))$. Таким образом, получено рекуррентное соотношение:

$$J^*(t, x^*(t)) \approx F(t, x^*(t), u^*(t))dt + J^*(t + dt, x^*(t + dt)). \qquad (5.4)$$

Теперь, пользуясь оптимальностью $u^*(t)$, можно переписать приближенное равенство (5.4) следующим образом:

$$J^*(t, x(t)) \approx \max_{u(t) \in U_t} \{F(t, x(t), u(t))dt + J^*(t + dt, x(t + dt))\}. \qquad (5.5)$$

Далее, в предположении дифференцируемости $J^*(t,\ x)$ по своим аргументам, переходя к пределу при $dt \to 0$ и учитывая (5.2), получим соотношение:

$$-\frac{\partial J^*(t,x)}{\partial t} = \max_{u(t) \in U_t} \{F(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial J^*(t,x)}{\partial x} f(t, x(t), u(t))\}. \qquad (5.6)$$

Соотношение (5.6) представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для определения функции $J^*(t,\ x)$. Оно называется *уравнением Беллмана в дифференциальной форме*.

Краевым условием для данного уравнения является оптимальное значение функционала при $t = t_1$, равное терминальному члену:

$$J^*(t_1, x(t_1)) = \Phi_0(t_1, x(t_1)). \qquad (5.7)$$

Как правило, аналитическое решение уравнения (5.6) найти довольно сложно или вовсе невозможно. Поэтому прибегают к дискретизации задачи (5.1) – (5.3) с последующим ее численным решением. Дискретная задача формулируется следующим образом:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \sum_{i=0}^{N-1} F(t_i, x_i, u_i)\Delta t_i \ + \ \Phi_0(x_N) \to \max. \qquad (5.8)$$

$$x_{i+1} = f(x_i, u_i), \quad x_0 \text{ – задано.} \qquad (5.9)$$

$$u_i \in U_i. \qquad (5.10)$$

Отметим, что в дискретной задаче состояние системы будет описываться вектором $x = (x_0, x_1,\ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, а управление – вектором $u = (u_0, u_1,\ldots, u_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$.

Для (5.8) – (5.10) уравнение Беллмана будет иметь следующий вид:

$$J_i^*(x_i) = \max_{u_i \in U_i} \{F(t_i, x_i, u_i)\Delta t_i + J_{i+1}^*(f(x_i, u_i))\} \qquad (5.11)$$

с краевым условием

$$J_N^*(x_N) = \Phi_0(x_N).$$

Решение задачи (5.11) при заданных краевых условиях производится последовательным решением уравнения (5.11) для шагов $i = N–1, N–2, \ldots, 0$ (обратный ход метода Беллмана). При этом на каждом шаге получается оптимальное управление u_i^* как функция от текущего состояния системы x_i. На втором этапе по полученным функциям $u_i^*(x_i)$ производится *синтез оптимального управления* для задачи с конкретным начальным условием x_0 (прямой ход метода Беллмана).

Таким образом, метод динамического программирования, в отличие от рассмотренных выше необходимых условий, дававших оптимальное управление как функцию времени $u^*(t)$ (*программное управление*), позволяет определять оптимальное управление как функцию состояния системы $u^*(t, x)$ (*синтезированное управление*), что дает возможность отыскивать решение сразу для целого класса задач с различными начальными условиями.

Далее будем считать, что в функционал задачи время не входит явно. Положим шаг Δt_i равным 1. Введем понятие *горизонта планирования* как количества шагов, оставшихся до завершения управления. Обозначим

$$V_k(x) = J_{N-k}^*(x),$$

т.е. максимальный выигрыш, который можно получить за k шагов, если начать из состояния x. В этом случае рекуррентное соотношение для $V_k(x)$ принимает вид

$$V_k(x) = \max_{u \in U} \{F(x, u) + V_{k-1}(f(x, u)), \qquad (5.12)$$

с краевым условием $V_0(x) = \Phi_0(x)$.

Примеры

1. З а д а ч а р а с п р е д е л е н и я р е с у р с а. Имеется некоторый ресурс в объеме $a > 0$, который необходимо распределить между N агентами так, чтобы максимизировать их суммарную полезность, если функция полезности i-го агента

$$F_i(u_i) = \ln u_i,$$

где u_i – объем ресурса, получаемый i-м агентом. (Считаем, что агенты как-то перенумерованы.)

Р е ш е н и е . В формальной постановке задача имеет вид:

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N} \ln u_i \to \max; \qquad (5.13)$$

$$\sum_{i=1}^{N} u_i \le a; \quad a > 0.$$

Приведем ее к задаче оптимального управления. Для этого необходимо выделить переменную, являющуюся аналогом времени (номера шага) в задаче оптимального управления, горизонта планирования, а также параметры состояния и управления в каждый момент времени.

Пусть номером шага в задаче является номер агента i, для которого принимается решение о распределении ресурса. Тогда величина u_i будет являться управлением на i-м шаге. Введем параметр состояния системы x_i как объем ресурса, имеющийся к i-му шагу ($i = 1, N$). Тогда из условия задачи получаем

$$x_{i+1} = x_i - u_i; \qquad x_1 = a. \qquad (5.14)$$

Так как может быть распределено ресурса не более, чем имеется в наличии, то имеет место ограничение на управление

$$0 \le u_i \le x_i. \qquad (5.15)$$

Таким образом, (5.13) – (5.15) представляет собой задачу оптимального управления в дискретном времени. Решим ее с использованием принципа Беллмана. Обозначим через $V_k(x)$ значение функции выигрыша, когда горизонт планирования равен k, т.е. ресурс x распределяется между k агентами (не важно, что последними, так как все агенты имеют одинаковые функции полезности).

Рассмотрим последний шаг в нашей задаче, который имеет место после того, как ресурс полностью распределен между всеми агентами. Согласно краевому условию функция Беллмана V_0 на этом шаге равна

$$V_0(x) = \Phi_0(x) \equiv 0.$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда ресурс должен быть выделен одному агенту. В этом случае горизонт планирования $k = 1$ и рекуррентное соотношение (5.12) принимает вид

$$V_1(x) = \max_{0 \le u \le x} \{ \ln u + V_0(x - u)\} = \max_{0 \le u \le x} \{ \ln u \} = \ln x ,$$

откуда $u_N^*(x) = x$.

Аналогично, при горизонте планирования $k = 2$ имеем

$$V_2(x) = \max_{0 \le u \le x} \{ \ln u + V_1(x - u)\} = \max_{0 \le u \le x} \{ \ln u + \ln(x - u)\}.$$

Максимум выражения в фигурных скобках по $u \in [0, x]$ достигается при $u^*(x) = \frac{x}{2}$, при этом $V_2(x) = 2 \ln\frac{x}{2}$. Значит, оптимальное управление в этой ситуации $u_{N-1}^*(x) = \frac{x}{2}$.

Покажем далее, что для горизонта $k = 0,\dots, N$ оптимальное управление на шаге $(N + 1 - k)$ и функция Беллмана горизонта k имеют вид

$$u_{N+1-k}^*(x) = \frac{x}{k}, \qquad V_k(x) = k \ln\frac{x}{k}. \tag{5.16}$$

Предположим, что это верно на некотором шаге $(N + 1 - k)$. Определим оптимальное управление и функцию Беллмана горизонта k:

$$V_{k+1}(x) = \max_{0 \le u \le x} \{ \ln u + V_k(x - u)\} = \max_{0 \le u \le x} \{ \ln u + k \ln \frac{x - u}{k}\}.$$

Обозначим

$$A(u) = \ln u + k \ln \frac{x - u}{k}.$$

Условия первого порядка максимума функции $A(u_{N-k})$ имеют вид

$$\frac{dA}{du} = \frac{1}{u} - \frac{k}{x - u} = 0,$$

откуда

$$u_{N-k}^*(x) = \frac{x}{k+1}, \quad V_{k+1}(x) = (k+1)\ln\frac{x}{k+1}.$$

Таким образом, определен общий вид оптимального управления для произвольного шага в задаче. Теперь проведем синтез оптимального управления для задачи с N агентами и начальным объемом ресурса, равным a:

$$u_1^*(x_1) = \frac{x_1}{N} = \frac{a}{N}; \quad x_2 = x_1 - u_1^* = a - \frac{a}{N} = \frac{a(N-1)}{N};$$

$$u_2^*(x_2) = \frac{x_2}{N-1} = \frac{a}{N}; \quad x_3 = x_2 - u_2^* = \frac{a(N-1)}{N} - \frac{a}{N} = \frac{a(N-2)}{N};$$

…

$$u_k^*(x_k) = \frac{x_k}{N+1-k} = \frac{a}{N}; \quad x_{k+1} = x_k - u_k^* = \frac{a(N+1-k)}{N} - \frac{a}{N} = \frac{a(N-k)}{N};$$

…

Таким образом, в данной задаче оптимальным является равномерное распределение ресурса между агентами:

$$u^* = \left(\frac{a}{N}, \frac{a}{N}, \ldots, \frac{a}{N}\right).$$

2. Модель Рамсея в дискретном времени. Найти оптимальное потребление c_t, максимизирующее функцию полезности агента за T периодов времени с учетом дисконтирования:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t U(c_t) \to \max_{0 \le c_t \le s_t};$$

$$s_{t+1} = \rho(s_t - c_t), \quad s_0 - \text{задано}, \quad \rho > 1; \quad 0 < \beta < 1,$$

если $U(c_t) = c_t^{1-\mu}, \quad 0 < \mu < 1$.

Определить предельную оптимальную траекторию при $T \to \infty$ (если она есть).

Решение. Для данной задачи рекуррентное соотношение (5.12) примет вид

$$V_l(s) = \max_{0 \le c \le s} \{c^{1-\mu} + \beta V_{l-1}(\rho(s-c))\}.$$

Вычислим $V_1(s)$, $V_2(s)$, $V_3(s)$ и определим общий вид $V_l(s)$:

$V_0 = \Phi_0(s_T) \equiv 0,$

$V_1(s) = \max\limits_{0 \le c \le s} \{c^{1-\mu} + \beta V_0(\rho(s-c))\} = \max\limits_{0 \le c \le s} \{c^{1-\mu}\} = s^{1-\mu}, \quad c_{T-1}(s) = s,$

$$V_2(s) = \max_{0\le c\le s}\ \{c^{1-\mu} + \beta V_1(\rho(s-c))\} = \max_{0\le c\le s}\ \{c^{1-\mu} + \beta(\rho(s-c))^{1-\mu}\}.$$

Обозначим $A_2(c) = c^{1-\mu} + \beta(\rho(s - c))^{1-\mu}$ и определим c, доставляющее максимум $A_2(c)$:

$$\frac{dA_2}{dc} = (1-\mu)c^{-\mu} - \beta(1-\mu)\rho^{1-\mu}(s-c)^{-\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad c^* = \frac{ds}{1+d},$$

где $d = (\beta\rho^{1-\mu})^{1/\mu}$.

Таким образом

$$V_2(s) = (1+d)^{\mu} s^{1-\mu}, \quad c_{T-2}(s) = \frac{ds}{1+d}.$$

Далее,

$$V_3(s) = \max_{0\le c\le s}\ \{c^{1-\mu} + \beta V_2(\rho(s-c))\} = \max_{0\le c\le s}\ \{c^{1-\mu} + \beta(1+d)^{\mu}(\rho(s-c))^{1-\mu}\}.$$

Обозначим $A_3(c) = c^{1-\mu} + \beta(1 + d)^{\mu}(\rho(s - c))^{1-\mu}$. Условие максимума $A_3(c)$ имеет вид

$$\frac{dA_3}{dc} = (1-\mu)c^{-\mu} - (1-\mu)(1+d)^{\mu} d^{\mu}(s-c)^{-\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad c^* = \frac{s}{1+d+d^2}.$$

Тогда

$$V_3(s) = (1+d+d^2)^{\mu} s^{1-\mu}, \quad c_{T-3}(s) = \frac{s}{1+d+d^2}.$$

Проверим, что для произвольного шага n выполнено

$$V_n(s) = s^{1-\mu}\left(\sum_{k=0}^{n} d^k\right)^{\mu}, \quad c_{T-n}(s) = \frac{s}{\sum_{k=0}^{n-1} d^k}. \qquad (5.17)$$

Допустим, что (5.17) выполнено для некоторого n. Определим вид $V_{n+1}(s)$ и $c_{T-n-1}(s)$.

$$V_{n+1}(s) = \max_{0\le c\le s}\ \{c^{1-\mu} + \beta V_n(\rho(s-c))\} = \max_{0\le c\le s}\ \{c^{1-\mu} + \beta(\rho(s-c))^{1-\mu}\left(\sum_{k=0}^{n} d^k\right)^{\mu}\}.$$

Выписывая аналогично предыдущим рассуждениям условия экстремума первого порядка для функции $A_{n+1}(c)$, получим

$$c^* = \frac{s}{\sum_{k=0}^{n} d^k}.$$

Тогда

$$V_{n+1}(s) = s^{1-\mu}\left(\sum_{k=0}^{n+1} d^k\right)^{\mu}, \quad c_{T-n}(s) = \frac{s}{\sum_{k=0}^{n} d^k},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, оптимальное управление в данной задаче будет иметь вид

$$c_t^*(s) = \frac{s}{\sum_{k=0}^{T-t-1} d^k}.$$

Тогда оптимальная траектория системы s_t^* (объем сбережений при оптимальном потреблении) определяется рекуррентно из соотношения

$$s_{t+1}^* = \rho(\, s_t^* - c_t^*(\, s_t^*)) = \rho(\, s_t^* - \frac{s_t^*}{\sum_{k=0}^{T-t-1} d^k}) = \rho d \frac{\sum_{k=0}^{T-t-2} d^k}{\sum_{k=0}^{T-t-1} d^k}\, s_t^*, \quad s_0^* = s_0.$$

Определим теперь предельную оптимальную траекторию при $T \to \infty$. Видно, что функция $V_n(s)$ имеет конечный предел при $n \to \infty$, только если $d < 1$:

$$V(s) = \lim_{n\to\infty} V_n(s) = \lim_{n\to\infty} s^{1-\mu} (\sum_{k=0}^{n} d^k)^{\mu} = \frac{s^{1-\mu}}{(1-d)^{\mu}}.$$

При этом

$$c(s) = \lim_{n\to\infty} c_n^*(s) = (1-d)s.$$

Управление $c(s)$, по определению, полагается решением задачи с бесконечным горизонтом планирования:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^{1-\mu} \to \max_{0 \le c_t \le s_t};$$

$$s_{t+1} = \rho(s_t - c_t), \quad s_0 - \text{задано}.$$

При этом функция $V(s)$ является решением операторного уравнения Беллмана для данной задачи

$$V = BV,$$

где оператор B определен на классе $\mathbf{W}$ непрерывных, вогнутых, монотонных функций Φ: $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, таких, что $\Phi(0) = 0$ и действует по формуле

$$B\Phi(s) = \max_{0\le c\le s} \{c^{1-\mu} + \beta\Phi(\rho(s-c))\}.$$

Действительно, проверим, что

$$V(s) = \frac{s^{1-\mu}}{(1-d)^{\mu}} = \max_{0\le c\le s} \{c^{1-\mu} + \beta\frac{(\rho(s-c))^{1-\mu}}{(1-d)^{\mu}}\}.$$

Из условий максимума функции в фигурных скобках получаем

$$c^{-\mu} - \beta\rho^{\,1-\mu}\frac{(s-c)^{-\mu}}{(1-d)^{\mu}} = c^{-\mu} - d^{\mu}\frac{(s-c)^{-\mu}}{(1-d)^{\mu}} = 0 \quad \Rightarrow \quad c^* = s(1-d) = c(s).$$

Но тогда

$$BV(s) = s^{1-\mu}(1-d)^{1-\mu} + d^{\mu}s^{1-\mu}d^{1-\mu}\,\frac{1}{(1-d)^{\mu}} = \frac{s^{1-\mu}}{(1-d)^{\mu}}.$$

Таким образом, решение задачи с бесконечным горизонтом планирования

$$c(s) = (1-d)s.$$

Оно не зависит от момента времени t, а определяется только текущим состоянием системы s. Такое решение называется *стационарным*. Для определения соответствующей ему траектории s_t найдем *переходное отображение* $Y(\cdot)$:

$$s_{t+1} = Y(s_t) = \rho(s_t - c(s_t)) = \rho(s_t - s_t(1-d)) = \rho d s_t = (\rho\beta)^{1/\mu}\, s_t.$$

Решением этого уравнения является функция

$$s_t = s_0\,\alpha^{t},$$

где $\alpha = (\rho\beta)^{1/\mu}$.

Видно, что в зависимости от величины коэффициента α траектория s_t, соответствующая стационарному потреблению, может возрастать, убывать или оставаться постоянной с течением времени.

3. Определить решение уравнения Беллмана для задачи с линейной полезностью:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t c_t \to \max_{0\le c_t\le x_t};$$

$$x_{t+1} = f(x_t - c_t), \quad x_0 - \text{задано}, \quad 0<\beta<1,$$

если $f(\cdot)\in\mathbf{W}$ такова, что $\lim\limits_{z\to\infty} f'(z) = \rho$, где $\rho\beta < 1$, т.е. $f(\cdot)$ ограничена сверху линейной функцией $b + \rho z$ (см. рис. 5.2).

При этом решение понимается как предел решений для конечных горизонтов.

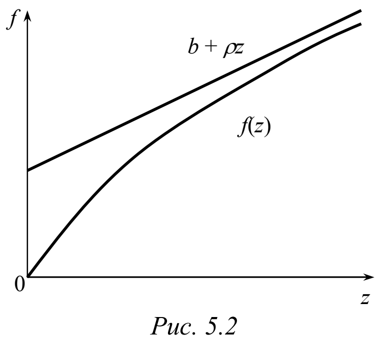

Рис. 5.2

Р е ш е н и е. Для конечных горизонтов имеем рекуррентное соотношение

$$V_k(x) = \max_{0\le c\le x} \{c + \beta V_{k-1}(f(x-c))\}.$$

Обозначим $z = x - c$. Тогда

$$V_k(x) = \max_{0\le z\le x} \{x - z + \beta V_{k-1}(f(z))\} = x + \max_{0\le z\le x} \{-z + \beta V_{k-1}(f(z))\}.$$

1. Покажем, что $\forall k = 1, 2, \ldots$ $V_k(x) \le x + K$ для некоторой константы $K > 0$:

$$V_0 = \Phi_0(x_T) \equiv 0,$$

$$V_1(x) = x + \max_{0\le z\le x} \{-z + \beta V_0(f(z))\} = x + \max_{0\le c\le s} \{-z\} = x,$$

$$V_2(x) = x + \max_{0\le z\le x} \{-z + \beta V_1(f(z))\} = x + \max_{0\le z\le x} \{-z + \beta f(z)\} \le$$

$$\le x + \beta b + \max_{0\le z\le x} \{-z(1-\rho\beta)\} = x + \beta b.$$

Рассуждая по индукции, получаем

$$V_k(x) = x + \max_{0\le z\le x} \{-z + \beta V_{k-1}(f(z))\} \le$$

$$\le x + b(\beta + \beta^2 + \ldots + \beta^{k-1}\} \le x + \frac{\beta b}{1-\beta}, \quad \forall\, k \ge 2.$$

Так как $\forall\ x \ge 0$ последовательность $V_k(x)$ не убывает при $k \to \infty$ и, кроме того, ограничена, то существует конечный предел

$$V(x) = \lim_{k\to\infty} V_k(x) \le x + K.$$

Из непрерывности оператора Беллмана B для данной задачи в классе функций **W** имеем

$$B\Phi(x) = x + \max_{0\le z\le x} \{-z + \beta\Phi(f(z))\},$$

откуда следует, что $BV = V$.

2. Обозначим $A(z) = -z + \beta V(f(z))$. Покажем, что функция $A(z)$ достигает максимума на множестве $\{z \ge 0\}$. Из свойств $V(\cdot)$ получаем

$A(0) = 0,$

$A(z) = -z + \beta V(f(z)) \le -z + \beta(f(z) + K) \le$

$\le -z + \beta(b + \rho z + K) = \beta(b + K) - z(1 - \rho\beta),$

которая убывает при $z \to \infty$.

Тогда в силу вогнутости функции $A(\cdot)$ она имеет вид, изображенный на рис. 5.3.

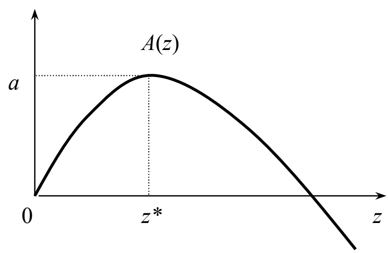

Рис. 5.3

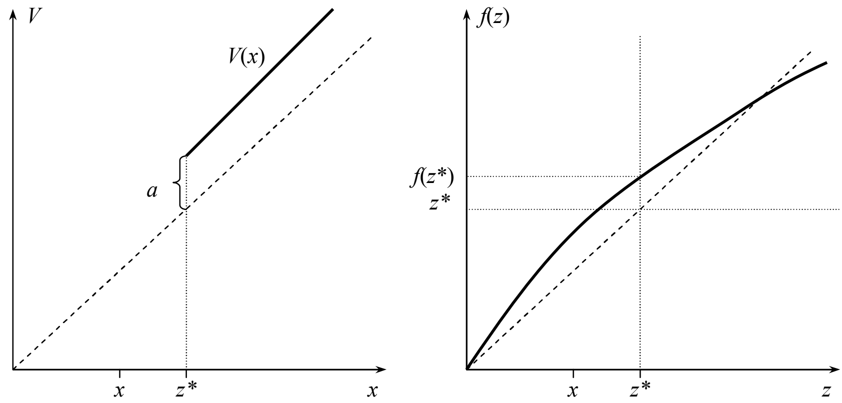

Рис. 5.4

3. Исходя из вида функции $A(z)$, можно заключить, что

$$V(x) = \begin{cases} x + a, & \text{при } x \geq z^*, \quad \text{т.к. } z(x) = z^* \\ \beta V(f(x)), & \text{при } x < z^* \quad \text{т.к. } z(x) = x \end{cases}, \tag{5.18}$$

где $z(x) = \arg \max\limits_{0 \le z \le x} A(z)$.

В частности, при $x < z^*$ $V(x) = \beta V(f(x)) < V(f(x))$, откуда в силу монотонности функции $V(\cdot)$ следует, что $x < f(x)$. Но тогда по непрерывности имеем также $z^* \leq f(z^*)$ (рис. 5.4).

4. Найдем величины a и z^*.

В силу монотонности $f(\cdot)$ при $z \geq z^*$ выполнено $f(z) \geq f(z^*) \geq z^*$. Тогда в силу пункта 3 получаем

$$a = \max_{z \ge 0} \{ -z + \beta V(f(z))\} = \max_{z \ge z^*} \{ -z + \beta(f(z) + a)\}.$$

Видно, что выражение в скобках совпадает с $A(z)$ при $z \geq z^*$. Эта функция вогнута и достигает максимума на $\{z \geq 0\}$ в точке z^*. Предположим также, что $A(z)$ дифференцируема в точке z^* (что предполагает дифференцируемость функций $V(\cdot)$ и $f(\cdot)$). Тогда точка максимума может быть найдена из условия экстремума первого порядка $A'(z^*) = 0$, откуда получаем

$$f'(z^*) = \frac{1}{\beta}, \quad a = \max_{z \ge 0} \{ -z + \beta(f(z) + a)\} = \frac{\max\limits_{z \ge 0}\{-z + \beta f(z)\}}{1 - \beta}.$$

5. Построим функцию $V(\cdot)$ для $x < z^*$:

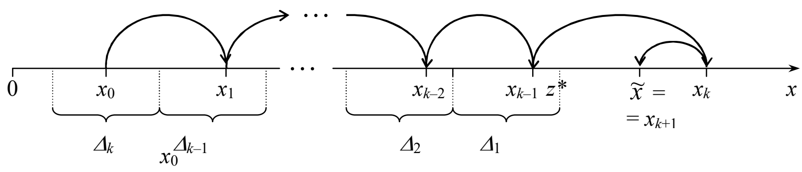

Рис. 5.5

а) рассмотрим отрезок $\Delta_1 = [x_1, z^*]$, где $x_1 < z^*$ и $f(x_1) = z^*$. Тогда $\forall\, x \in \Delta_1$ $f(x) \geq z^*$, поэтому в силу (5.18)

$$V(x) = \beta V(f(x)) = \beta(f(x) + a);$$

б) Рассмотрим отрезок $\Delta_2 = [x_2, x_1]$, где $x_2 < x_1$ и $f(x_2) = x_1$. $\forall\, x \in \Delta_2$ $f(x) \in \Delta_1$, тогда в силу (5.18) и предыдущего пункта

$$V(x) = \beta V(f(x)) = \beta^2 (f(f(x)) + a).$$

Продолжая эти рассуждения далее, на отрезке $\Delta_n = [x_n, x_{n-1}]$, где $x_n < x_{n-1}$ и $f(x_n) = x_{n-1}$, имеем

$$V(x) = \beta^n (\underbrace{f(\ldots f(f(x))\ldots)}_{n \text{ раз}} + a).$$

На стыках значение функции $V(x)$ устанавливается, исходя из непрерывности. Например, в точке z^* выполнены условия

$$V(z^{*+}) = z^* + a = z^* + \frac{\beta f(z^*) - z^*}{1-\beta} = \beta\left(f(z^*) + \frac{\beta f(z^*) - z^*}{1-\beta}\right) = V(z^{*-}).$$

Таким образом, решение уравнения Беллмана $V(x)$ полностью восстановлено для $x \geq 0$.

6. Определим переходное отображение $Y(x) = f(z(x))$, где $z(x) = \arg\max\limits_{0 \leq z \leq x} A(z)$, см. п. 3).

При $x \geq z^*$ $z(x) = z^*$, откуда $Y(x) = f(z^*) = \tilde{x}$. При $x < z^*$ $z(x) = x$, тогда $Y(x) = f(x) > x$. Процесс изменения фазовой координаты x при таком переходном отображении для некоторого начального условия x_0 показан на рис. 5.5.

В заключение рассмотрим задачу, в которой время (номер шага) явно входит как аргумент функции полезности, стоящей под знаком суммы (дисконтирующий множитель не считается за такой случай).

При этом результат оптимизации существенно зависит от упорядочения шагов, поэтому понятие горизонта планирования использовать нельзя. Следовательно, рекуррентное соотношение Беллмана в данной задаче будет записываться в общем виде (5.11).

4. З а д а ч а о р а н ц е. Имеется контейнер емкостью V и грузоподъемностью M и N типов изделий, для каждого из которых известны стоимость c_i, вес m_i и объем v_i. Требуется разместить в контейнере набор изделий максимальной суммарной стоимости.

Р е ш е н и е. Обозначим через x_i – количество предметов i-го типа, размещенных в контейнере. Тогда задача будет иметь вид

$$L(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \le M, \quad \sum_{i=1}^{N} v_i x_i \le V,$$

$$x_i \in \mathbb{N}, \; i = 1,\ldots, N.$$

Сведем ее к дискретной задаче оптимального управления. Пусть "шагом" операции является номер класса изделий, которые складываются в контейнер. Определим две переменные состояния: μ_i – оставшаяся грузоподъемность после распределения изделий i-го класса и γ_i – свободный объем после распределения изделий i-го класса. Тогда с каждым шагом состояние системы будет изменяться по следующему закону:

$$\mu_{i+1} = \mu_i - m_{i+1} x_{i+1}, \quad \mu_0 = M,$$

$$\gamma_{i+1} = \gamma_i - v_{i+1} x_{i+1}, \quad \gamma_0 = V.$$

Очевидно, управлением в данной задаче является количество изделий x_i, помещаемых в ранец на каждом шаге. Функция Беллмана $J_l(\mu, \gamma)$ в данной задаче будет представлять собой максимальную стоимость набора, состоящего из изделий классов $i \ge l$, помещенных в контейнер:

$$J_l(\mu, \gamma) = \max_{x_l} \{c_l x_l + J_{l+1}(\mu - m_l x_l, \gamma - v_l x_l)\}, \quad m_l x_l \le \mu, \quad v_l x_l \le \gamma.$$

Так как управление x_l является дискретным, то функцию Беллмана удобно представлять в табличном виде, с дискретизацией, соответствующей минимальным изменениям объема и грузоподъемности контейнера при помещении в него изделий.

В качестве примера рассмотрим случай $M = 7$, $V = 7$, $N = 3$ со следующими параметрами изделий:

Класс, i	**Стоимость**, c_i	**Масса**, m_i	**Объем**, v_i
1	4	3	1
2	5	2	3
3	1	1	3

В этом случае исходная задача целочисленного программирования запишется как

$$L(x) = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7,$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 7,$$

$$x_i \in \mathbb{N},\ i = 1,\dots, N.$$

Множество допустимых состояний системы на каждом шаге представляет собой пары (μ, γ), где $\mu, \gamma \in \{0, 1, \dots, 7\}$.

Функция Беллмана для шага 3 имеет вид

$$J_3(\mu, \gamma) = \max_{x_3} \{x_3\}, \quad x_3 \le \mu, \quad 3x_3 \le \gamma, \quad x_3 \in \mathbb{N}.$$

Ее значения для допустимых состояний приведены в таблице:

$\mu \setminus \gamma$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1
2	0	0	0	1	1	1	2	2
3	0	0	0	1	1	1	2	2
4	0	0	0	1	1	1	2	2
5	0	0	0	1	1	1	2	2
6	0	0	0	1	1	1	2	2
7	0	0	0	1	1	1	2	2

На шаге 2 функция Беллмана имеет вид

$$J_2(\mu, \gamma) = \max_{x_2} \{5x_2 + J_3(\mu - 2x_2, \gamma - 3x_2)\}, \quad 2x_2 \le \mu, \quad 3x_2 \le \gamma, \quad x_2 \in \mathbb{N}.$$

Таблица значений $J_2(\mu, \gamma)$ строится с использованием уже полученной таблицы для $J_3(\mu, \gamma)$:

$\mu \setminus \gamma$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1
2	0	0	0	5	5	5	5	5
3	0	0	0	5	5	5	6	6
4	0	0	0	5	5	5	10	10
5	0	0	0	5	5	5	10	10
6	0	0	0	5	5	5	10	10
7	0	0	0	5	5	5	10	10

На шаге 1 функция Беллмана имеет вид

$$J_1(\mu, \gamma) = \max_{x_1} \{4x_1 + J_2(\mu - 3x_1, \gamma - x_1)\}, \quad 3x_1 \le \mu, \quad x_1 \le \gamma, \quad x_1 \in \mathbb{N}.$$

Таблица значений $J_1(\mu, \gamma)$ выглядит следующим образом:

$\mu \setminus \gamma$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1
2	0	0	0	5	5	5	5	5
3	0	4	4	5	5	5	6	6
4	0	4	4	5	5	5	10	10
5	0	4	4	5	9	9	10	10
6	0	4	8	8	9	9	10	10
7	0	4	8	8	9	9	10	14

Максимальная стоимость набора изделий соответствует значению $J_1(7, 7)$, а сам набор – оптимальным значениям компонент управления (x_1, x_2, x_3), на которых достигаются значения функций J_1, J_2 и J_3: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$.

Упражнения

1. Дана модель Рамсея в дискретном времени с конечным горизонтом:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \ln c_t \to \max_{0 \le c_t \le s_t};$$

$$s_{t+1} = \rho(s_t - c_t), \quad s_0 - \text{задано}, \quad \rho > 1; \quad 0 < \beta < 1.$$

а) Выписать для данной модели рекуррентное соотношение Беллмана, найти общий вид функций выигрыша $V_k(s)$, $k = 1, 2,\ldots$, и оптимальных стратегий потребления $c_k(s)$.

б) Определить решение уравнения Беллмана $V(s)$ для этой задачи путем предельного перехода при $T \to \infty$ (если она есть). Показать, что стационарная стратегия потребления не зависит от ρ, а оптимальная стационарная фазовая траектория имеет вид геометрической прогрессии. Найти неподвижную точку стационарного переходного отображения $Y(\cdot)$ как функцию параметров β и ρ.

2. В задаче

$$\sum_{i=0}^{n-1} \beta^i c_i^p \to \max_{c_i \geq 0}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} c_i \leq s, \quad p > 1, \quad \beta > 0$$

получить рекуррентное соотношение Беллмана для функций V_n. Исходя из него получить рекуррентное соотношение для постоянных коэффициентов в выражении для V_n. Описать характер оптимальной стратегии потребления c_i в зависимости от параметра β. Получить выражение для V_n непосредственно.

3. Рассматривается задача

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \to \max_{0 \leq c_t \leq x_t};$$

$$x_{t+1} = f(x_t - c_t), \quad x_0 \text{ – задано},$$

где $U(c) \leq a + \delta c \ \forall\ c \geq 0$, и $f(z) \leq b + \rho z \ \forall\ z \geq 0$; a, δ, β, b, ρ – положительные параметры; $\beta < 1$, $\rho\beta < 1$; функции f, $U \in \mathbf{W}$.

Доказать, что существует решение уравнения Беллмана $V(\cdot)$ для этой задачи и имеет место неравенство

$$V(x) \leq \delta x + K, \quad K = \text{const}.$$

Определить значение K.

4. В задаче 3 положить

$$U(c) = \begin{cases} 0, & c = 0 \\ a + \delta c, & c > 0 \end{cases}.$$

Построить функцию Беллмана $V(\cdot)$.

5. Дана скалярная динамическая система

$$\dot{x} = ax + bu, \qquad t \geq 0$$

с критерием качества

$$J(u) = \int_0^\infty \alpha x^2 + \beta u^2 dt \to \inf,$$

где a, $b \neq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные постоянные.

Показать, что оптимальное управление u^* имеет вид

$$u^* = -\frac{1}{b}(a + \sqrt{a^2 + b^2 \alpha \beta^{-1}})x,$$

а функция Беллмана $V(t, x)$ – вид

$$V(t, x) = x^2 \beta b^{-2} (a + \sqrt{a^2 + b^2 \alpha \beta^{-1}}).$$

6. Найти функцию Беллмана $V(\cdot)$ и оптимальное управление для динамической системы

$$\dot{x} = u, \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

$$x(1) \to \min; \quad |u| \leq 1.$$

7. Найти оптимальное решение задачи о ранце при $M = 8$, $V = 6$, $N = 3$:

Класс, i	**Стоимость**, c_i	**Масса**, m_i	**Объем**, v_i
1	3	3	2
2	2	2	1
3	1	1	3

Список литературы

1. Беллман Р. *Динамическое программирование.* – М.: ИЛ, 1960.
2. Бурштейн И.М. *Динамическое программирование в планировании.* – М.: Экономика, 1968.
3. Вентцель Е.С. *Элементы динамического программирования*. – М.: Наука, 1964.
4. Хедли Дж. *Нелинейное и динамическое программирование.* – М.: Мир, 1967.

Глава 2. Динамические модели экономики

В качестве приложений, иллюстрирующих применение методов теории оптимального управления и динамического программирования к исследованию экономических процессов, рассмотрим две довольно специальные экономические постановки динамических задач на экстремум и равновесие.

В первой из них исследуется задача планирования функционирования предприятия в условиях переходной экономики, характеризуемой наличием неплатежей, инфляцией и нестабильностью спроса на конечную продукцию. Для таких условий можно показать, что оптимальный процесс функционирования предприятия может предусматривать наличие периодов простоя. Данный результат демонстрирует, что простои предприятий, широко распространенные в переходной экономике, могут возникать не как результат ошибочной политики руководителя, а иметь структурную природу, отражающую общую неэффективность рассматриваемого предприятия.

Вторая модель – макроэкономическая, в ней рассматривается проблема оптимизации правительственной политики при ограничениях, описывающих равновесие совершенного предвидения. Выдвигается дополнительное требование состоятельности политики во времени, когда последующие правительства не отклоняются от оптимальной политики, рассчитанной с начального момента. Приводится характеризация таких оптимальных политик в духе Фелпса.

§ 1. Динамическая модель функционирования предприятия в условиях неплатежей

В качестве примера использования принципа максимума в исследованиях производственно-экономических систем изучим проблему образования неплатежей предприятий в переходных экономиках.

При функционировании предприятия в "классической" рыночной среде накопление просроченной задолженности является признаком неэффективного управления предприятием. Однако в условиях экономической нестабильности, всеобщих задержках расчетов контрагентами, высоких темпах инфляции просроченная кредиторская задолженность может выступать в качестве одного из средств расчетов (квазиденег), т.е. по сути дела, являться одним из активов предприятия. В этом случае накопление либо уменьшение просроченной задолженности может стать частью оптимальной стратегии по управлению финансами.

Для исследования данной ситуации рассмотрим динамическую модель предприятия, функционирующего в условиях неплатежей контрагентов и способного накапливать просроченную задолженность, не оплачивая поставки сырья и комплектующих.

Описываемая модель имеет следующий вид:

$$J(X(t), \nu(t)) = N(T) - D(T) \to \max; \tag{1.1}$$

$$\dot{N}(t) = p(t)C(t) - \nu(t) - Z(X); \qquad N(0) = N_0; \tag{1.2}$$

$$\dot{D}(t) = rD(t) + X(t)\sum_j a_j p_j(t) - \nu(t); \qquad D(0) = D_0; \tag{1.3}$$

$$\dot{S}(t) = X(t) - C(t) - \alpha S(t); \qquad S(0) = S_0, \tag{1.4}$$

при фазовых ограничениях в каждый момент времени $t \in [0, T]$:

$$N(t) \geq 0; \qquad D(t) \geq 0; \qquad 0 \leq S(t) \leq S^1; \tag{1.5}$$

а также ограничениях на управление:

$$0 \leq X(t) \leq K(t); \quad 0 \leq \nu(t) \leq \nu_{\max}(t). \tag{1.6}$$

Здесь $K(t)$ – объем производственных мощностей предприятия; $X(t)$ – объем валового выпуска; $S(t)$ – объем запасов готовой продукции; α – скорость потерь запаса готовой продукции; $p(t)$ – цены на продукцию предприятия; $p_j(t)$ – цены на сырье, материалы, оборудование, комплектующие и услуги поставщиков; $C(t)$ – объем спроса на продукцию; $D(t)$ – объем просроченной задолженности предприятия к моменту t; $r(t)$ – норма начислений на просроченную задолженность; $v(t)$ – величина выплат по погашению задолженности; $N(t)$ – кумулятивная чистая прибыль предприятия к моменту t; $Z(X)$ – функция издержек, в которую мы включили издержки производства, не связанные с закупкой сырья и материалов (выплата заработной платы, отчисления в бюджеты и внебюджетные фонды, арендные платежи, амортизационные отчисления и т.д.).

Критерий (1.1) представляет собой свертку двух частных критериев: максимизации кумулятивной чистой прибыли за период планирования $N(T)$ и минимизации просроченной задолженности за этот же период $D(T)$.

Дифференциальные уравнения (1.2) – (1.4) описывают динамику исследуемых параметров предприятия.

Правая часть уравнения (1.2) представляет собой определение чистой прибыли: объем выручки ($p(t)C(t)$) за вычетом выплат по погашению задолженности $v(t)$ и прочих затрат, включенных в величину $Z(X)$.

Уравнение (1.3) описывает изменение накопленной задолженности предприятия. Согласно ему, задолженность возрастает при закупках промежуточных продуктов и за счет начисления штрафных санкций по ставке r. Уменьшение задолженности происходит при выплатах $v(t)$.

Последнее уравнение описывает динамику запасов готовой продукции $S(t)$. Объем запасов возрастает в процессе производства и убывает при продажах, а также в связи с потерями при хранении.

Таким образом, рассматриваемая модель функционирования предприятия в условиях кризиса представляет задачу оптимального управления с фиксированным горизонтом планирования. Для решения этой задачи воспользуемся вариационным принципом и принципом максимума.

Для упрощения будем далее предполагать, что рыночные цены $p(t)$ и $p_j(t)$, а также уровень спроса на продукцию предприятия $C(t)$ постоянны на интервале планирования $[0, T]$.

1.1. Оптимальное функционирование локально рентабельного предприятия

Оптимальный процесс функционирования предприятия существенно зависит от того, обеспечивает ли уровень внешнего спроса на его продукцию неотрицательность прибыли. В данном пункте мы будем предполагать, что рассматриваемое предприятие имеет возможность получать неотрицательную мгновенную прибыль при заданном уровне спроса C^0 (назовем эту ситуацию *локальной рентабельностью*), а в следующем исследуем случай отсутствия локальной рентабельности.

Покажем, что в этом случае задача (1.1) – (1.6) допускает декомпозицию на задачи, связанные с оптимизацией величины выплат $v(t)$ и объема выпускаемой продукции $X(t)$. Для этого нам понадобится ряд свойств ее оптимального решения.

Л е м м а 1 . 1 . *В условиях локальной рентабельности предприятия на оптимальном режиме функционирования* $v^*(t) \geq \sum_{j=1}^{n} a_j p_j X^*(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Предположим, что $\exists\ t_0,\ t_1 : 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T$, $\forall\ t \in [t_0, t_1]$: $v^*(t) < \sum_{j=1}^{n} a_j p_j X^*(t)$.

Рассмотрим функцию

$$v'(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j p_j X^*(t), & t_0 \leq t \leq t_1 \\ v^*(t), & \text{иначе} \end{cases}.$$

В силу локальной рентабельности $\forall\ t \in [t_0, t_1]$

$$\dot{N}(t) = pC(t) - v'(t) - Z(X^*(t)) = pC(t) - \sum_{j=1}^{n} a_j p_j X^*(t) - Z(X^*(t)) \geq 0.$$

Так как управление $(X^*(t), v^*(t))$ допустимое, имеем $N(t_0) \geq 0$. Тогда в силу предыдущего неравенства $\forall\ t \in [t_0, t_1]$ $N(t) \geq 0$, т.е. управление $(X^*(t), v'(t))$ является допустимым в исходной задаче.

Вычислим значения функционала (1.1) на управлениях $v^*(t)$ и $v'(t)$:

$$N(T)\big|_{v'(t)} = \int_0^T (pC(t) - v'(t) - Z(X^*(t)))dt = \int_0^{t_0} (pC(t) - v^*(t) - Z(X^*(t)))dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} (pC(t) - \sum_{j=1}^{n} a_j p_j X^*(t) - Z(X^*(t)))dt + \int_{t_1}^{T} (pC(t) - v^*(t) - Z(X^*(t)))dt =$$

$$= \int_0^T (pC(t) - v^*(t) - Z(X^*(t)))dt + \int_{t_0}^{t_1} (v^*(t) - v'(t))dt = N(t)|_{v^*(t)} - \int_{t_0}^{t_1} (v'(t) - v^*(t))dt.$$

По предположению, $v^*(t) < v'(t)\ \forall\ t \in [\, t_0, t_1]$. Тогда

$$N(T)|_{v^*(t)} - N(T)|_{v'(t)} = \int_{t_0}^{t_1} (v'(t) - v^*(t))dt\,.$$

Теперь рассмотрим величину $D(T)$:

$$\dot{D}(t) = rD(t) + X(t)\sum_j a_j p_j(t) - v(t)\,; \qquad D(0) = D_0,$$

тогда

$$D(t) = D_0 e^{\rho t} + \int_0^t (X(\tau)\sum_j a_j p_j(\tau) - v(\tau))e^{\rho(t-\tau)}d\tau\,,$$

$$D(T)|_{v^*(t)} - D(T)|_{v'(t)} = \int_0^{Tt} (v'(\tau) - v^*(\tau))e^{\rho(t-\tau)}d\tau\,.$$

$$J|_{v'(t)} - J|_{v^*(t)} = N(T)|_{v'(t)} - N(T)|_{v^*(t)} - D(T)|_{v'(t)} + D(T)|_{v^*(t)} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (v'(t) - v^*(t))dt - \int_{t_0}^{t_1} (v'(t) - v^*(t))e^{\rho(t-\tau)}dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (v'(t) - v^*(t))(1 - e^{\rho(t-\tau)})dt\,.$$

Первый множитель подынтегральной функции положителен, второй – отрицателен $\forall t < T$. Таким образом, $J|_{v'(t)} - J|_{v^*(t)} < 0$, т.е. управление $v^*(t)$ не является оптимальным. •

Полученный результат утверждает, что в условиях локальной рентабельности при оптимальном управлении не создается дополнительной задолженности, а ее прирост может происходить только за счет начислений на начальную величину D_0.

В этом случае дифференциальные связи (1.2) и (1.3) могут быть записаны в следующем виде:

$$\dot{N}(t) = p(t)C(t) - \sum_{j=1}^{n} a_j p_j X - Z(X) - f(t)\,; \qquad N(0) = N_0; \tag{1.7}$$

$$\dot{D}(t) = rD(t) - f(t)\,; \qquad D(0) = D_0, \tag{1.8}$$

где $f(t) = v(t) - \sum_{j=1}^{n} a_j p_j X$ – избыточные выплаты по погашению начальной задолженности D_0.

Рассмотрим случай $D_0 = 0$, соответствующий отсутствию дебиторской задолженности. В силу леммы 1.1 и ограничения (1.5) $f(t) \equiv 0$, откуда

$D(t) \equiv 0$. Тогда задача (1.1) – (1.6) с учетом (1.7) запишется в виде

$$J_{\text{II}}(X(t)) = N(T) \to \max, \tag{1.9}$$

$$\dot{N}(t) = p(t)C(t) - \sum_{j=1}^{n} a_j p_j X(t) - Z(X(t)); \quad N_1(0) = N_0; \tag{1.10}$$

$$\dot{S}(t) = X(t) - C(t) - \alpha S(t); \quad S(0) = S_0, \tag{1.11}$$

$$N_1(t) \geq 0; \qquad 0 \leq S(t) \leq S^1; \qquad 0 \leq X(t) \leq K(t). \tag{1.12}$$

Лемма 1.2. *Пусть $X^*(t)$ – оптимальное управление в задаче (1.9) – (1.12). Тогда для любой заданной функции избыточных выплат $f(t)$ такой, что $\forall t \in [0, T]$ $N(t)|_{X^*(t),\, f(t)} \geq 0$ $X^*(t)$ является оптимальным управлением в задаче (1.1) – (1.6).*

Доказательство. В силу $N(t)|_{X^*(t), f(t)} \geq 0$ $X^*(t)$ – допустимое управление в модифицированной задаче. При этом

$$N(T)|_{X(t)} = \int_0^T (p(t)C(t) - \sum_{j=1}^{n} a_j p_j X(t) - Z(X(t)) - f(t))dt =$$

$$= \int_0^T (p(t)C(t) - \sum_{j=1}^{n} a_j p_j X(t) - Z(X(t)))dt - \int_0^T f(t)dt = N_1(T) - \int_0^T f(t)dt\,.$$

Тогда

$$J(X^*(t)) - J(X(t)) = N(T)|_{X^*(t)} - N(T)|_{X(t)} = N_1(T)|_{X^*(t)} - \int_0^T f(t)dt -$$

$$- N_1(T)|_{X(t)} + \int_0^T f(t)dt = J_{\text{II}}(X^*(t)) - J_{\text{II}}(X(t)) \geq 0,$$

т.е. управление $X^*(t)$ оптимально в задаче (1.1) – (1.6). •

Таким образом, при наличии избыточных выплат $f(t)$, таких, что в каждый момент времени величина $N(t)$ на оптимальном режиме неотрицательна, оптимальный выпуск $X(t)$ не изменяется, что дает возможность провести декомпозицию исходной модели и рассматривать по отдельности задачи максимизации прибыли и погашения задолженности.

Нетрудно видеть, что решением задачи (1.9) – (1.12) при условии локальной рентабельности предприятия является функция

$$X^*(t) = \min\{K(t), C(t)\}.$$

Теперь сформулируем задачу определения оптимальной стратегии выплат по погашению задолженности предприятием:

$$J_{\mathrm{III}}(f(t)) = D(T) \to \min, \tag{1.13}$$

$$\dot{D}(t) = rD(t) - f(t), \qquad D(0) = D_0, \tag{1.14}$$

$$\dot{N}(t) = p(t)C(t) - \sum_{j=1}^{n} a_j p_j X^*(t) - Z(X^*(t)) - f(t), \quad N(0) = N_0,$$

$$D(t) \geq 0, \qquad N(t) \geq 0, \qquad 0 \leq f(t) \leq v_{\max}. \tag{1.15}$$

В силу ограничения на неотрицательность фазовой переменной $D(t)$ достаточным условием оптимальности допустимого управления $f(t)$ в данной задаче является $D(T)|_{v(t)} = 0$. Следовательно, максимизация функционала (1.1) сводится к максимизации величины $N(T)$. Учитывая, что бюджетное ограничение при наличии избыточных выплат $f(t)$ имеет вид

$$N(T) = \int_0^T (p(t)C(t) - \sum_{j=1}^{n} a_j p_j X(t) - Z(X(t)))dt - \int_0^T f(t)dt, \tag{1.16}$$

будем отыскивать стратегию $f^*(t)$, такую, что

$$J_{\mathrm{IV}}(f(t)) = \int_0^T f(t)dt \to \min, \tag{1.17}$$

$$\dot{D}(t) = rD(t) - f(t); \quad D(0) = D_0; \quad D(T) = 0; \tag{1.18}$$

$$N(t) \geq 0; \qquad 0 \leq f(t) \leq v_{\max}. \tag{1.19}$$

Т е о р е м а 1 . 1 . *Пусть существуют* $X^*(t)$ *– оптимальное управление в задаче (1.9) – (1.12) и* $f^*(t, X)$ *– оптимальное управление в задаче (1.17) – (1.19). Тогда, если* $\forall t \in [0, T]$ $N(t)|_{X^*(t), f^*(t)} \geq 0$, *то* $(X^*(t), v^*(t))$, *где* $v^*(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j p_j X^*(t) + f^*(t, X^*)$ *– оптимальное управление в задаче (1.1) – (1.6).*

Д о к а з а т е л ь с т в о . В силу леммы 1.1 задача (1.1) – (1.6) может быть приведена к задаче оптимизации функционала J на множестве управлений $(X(t), f(t))$, где $f(t) = v(t) - \sum_{j=1}^{n} a_j p_j X(t)$ при ограничениях (1.7), (1.8).

Достаточным условием оптимальности управления в данной задаче является одновременное выполнение условий:

$$J'(X(t), f(t)) = N(T) \to \max, \quad J_{\mathrm{III}}(f(t)) = D(T) \to \min \tag{1.20}$$

при указанных ограничениях.

Для $J_{\mathrm{III}}(f(t))$ достаточным условием оптимальности является $D(T)|_{f(t)} = 0$. Поэтому любое допустимое управление $f(t)$ в задаче (1.17) – (1.19) будет максимизировать $J_{III}(f(t))$.

Кроме того, в силу (1.7)

$$\forall\, X(t),\ \forall f(t) \neq f^*(t)\colon J'(X(t), f^*(t)) \geq J'(X(t), f(t)).$$

С другой стороны, в силу леммы 1.2

$$\forall\, f(t),\ \forall X(t) \neq X^*(t)\colon J'(X^*(t), f^*(t)) \geq J'(X(t), f^*(t)).$$

Из этих неравенств следует $J'(X^*(t), f^*(t)) \geq J'(X(t), f(t))$ $\forall f(t) \neq f^*(t)$, $\forall X(t) \neq X^*(t)$, т.е. управление $(X^*(t),\ f^*(t))$ максимизирует функционал $J'(X(t), f(t))$.

Отсюда следует, что управление $(X^*(t),\ \sum_{j=1}^{n} a_j p_j X^*(t) + f^*(t))$ будет оптимальным в задаче (1.1) – (1.6). •

Таким образом, исходная задача оптимального управления может быть сведена к решению двух задач более простого вида. Действительно, оптимальное управление $f^*(t)$ в задаче (1.17) – (1.19) может быть найдено аналитически. Несложно получить, что

$$f^*(t) = \begin{cases} v_{\max}, & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & t_0 < t \leq T \end{cases}, \tag{1.21}$$

где t_0 определяется из уравнения

$$D(t_0) = D_0 \exp(\rho t_0) - \int_0^{t_0} N(\tau) e^{\rho(t_0 - \tau)} d\tau = 0, \tag{1.22}$$

а $v_{\max}$ – из условия $N(t)\,|_{f^*(t)} = 0$.

Видно, что оптимальное управление в задаче (1.17) – (1.19) существует при условии

$$D_0 \leq \int_0^{T} N(\tau) e^{-\rho\tau} d\tau. \tag{1.23}$$

При нарушении данного ограничения полное погашение предприятием задолженности за период времени T невозможно.

Однако оптимальное управление в задаче (1.1) – (1.6) в этом случае по-прежнему существует и может быть найдено как решение задачи (1.16) – (1.19) при нефиксированном $D(T)$ с условием $D(T) \to \min$. Оптимальное решение этой задачи:

$$v^*(t) = v_{\max} \quad \forall\ t \in [0,\ T].$$

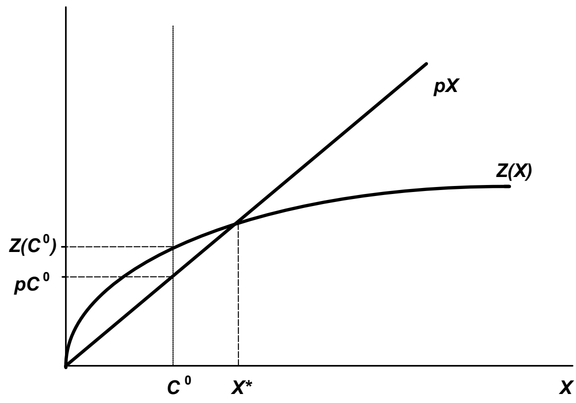

Рис. 1.1. Функция издержек для ВДМ-технологии

На этом решении достигается лишь частичное погашение задолженности. Остаток задолженности предприятия на конец периода планирования в этом случае составит:

$$D(T) = D_0 e^{\rho T} - \int_0^T N(\tau) e^{\rho(T-\tau)} d\tau .$$

1.2. Оптимальный процесс функционирования предприятия при отсутствии локальной рентабельности

В данном пункте будет рассмотрен случай, когда текущий уровень спроса не позволяет получать предприятию неотрицательную прибыль и существуют причины, препятствующие закрытию предприятия (например, социальная значимость, сопротивление властей и др.).

При этом могут быть получены нетривиальные результаты для предприятий с технологией производства, характеризующейся убывающими предельными издержками (*возрастающие доходы от масштаба производства*, *ВДМ*). Типичный вид функции издержек $Z(X)$, соответствующей данному случаю, приведен на рис. 1.1.

Видно, что для такой функции $Z(X)$ условия локальной рентабельности могут не выполняться при малых объемах спроса C^0, поэтому найденный выше режим функционирования может не быть оптимальным.

Функция Понтрягина для задачи (1.1) – (1.6) записывается в виде

$$H(t, X, v, \psi) = \psi_1(pC(t) - v(t) - Z(X)) + \psi_2(rD(t) + X(t)\sum_j a_j p_j -$$

$$- v(t)) + \psi_3(X(t) - C(t) - \alpha S(t)) \to \max_{X,v} . \qquad (1.24)$$

Для учета фазовых ограничений выпишем лагранжиан задачи:

$$L(t, X, v, \psi) = H(t, X, v, \psi) + \mu_N N(t) + \mu_S S(t) + \mu_{s_0}(S_0 - S(t)) + \mu_D D(t) \to \max_{u \in \mathbf{U}} ,$$

где μ_N, μ_S, μ_{S_0}, μ_D – множители Лагранжа, соответствующие фазовым ограничениям (1.5).

Видно, что при фиксированном t функция L является монотонной по управлениям $X(t)$ и $v(t)$. Классическим приемом решения задач такого рода является исследование функций переключения $\frac{\partial L}{\partial X}$ и $\frac{\partial L}{\partial v}$ [8].

Так как ограничения не зависят от управлений, максимум L на множестве управлений ($X(t)$, $v(t)$) будет совпадать с максимумом H.

В силу линейности H по управлению $v(t)$ максимум по этой переменной достигается на границах множества допустимых значений.

Рассмотрим слагаемые, зависящие от переменной X:

$$H^1(t, X, \psi) = -\psi_1 Z(X) + X(t)(\psi_2 \sum_j a_j p_j + \psi_3) \to \max_X . \qquad (1.25)$$

Зависимость H^1 от управления X определяется знаками сопряженных переменных.

Выпишем сопряженную систему для задачи (1.1) – (1.9):

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial L}{\partial N} = -\mu_N ; \qquad \psi_1(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial N(T)} = 1;$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial L}{\partial D} = -\psi_2 r - \mu_D ; \quad \psi_2(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial D(T)} = -1;$$

$$\dot{\psi}_3 = -\frac{\partial L}{\partial S} = -\mu_S + \mu_{S_0} ; \quad \psi_3(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial S(T)} = 0.$$

В силу того, что множитель Лагранжа $\mu_N \geq 0$, получаем $\dot{\psi}_1 \leq 0$. Тогда из краевого условия на $\psi_1(T)$ следует, что $\psi_1(t) > 0$ $\forall t \in [0, T]$. Из вогнутости $Z(X)$ получаем, что H^1 – выпуклая функция переменной X, поэтому ее максимум будет достигаться на границах множества значений X.

В связи с этим будем отыскивать оптимальное решение данной задачи в классе кусочно-постоянных режимов выпуска.

В качестве начального приближения для анализа рассмотрим "импульсный" режим функционирования предприятия, имеющий одну точку переключения:

$$X(t) = \begin{cases} X^0, & t \in [0, t_0] \\ 0, & t \in [t_0, T] \end{cases}. \qquad (1.26)$$

где $X^0 \geq X^*$.

В силу условия $C^0 < X^*$ для такого режима функционирования конечный спрос на продукцию предприятия будет полностью удовлетворяться на отрезке времени $[0,\ t_0]$, поэтому $C(t) = C^0$ для $t \in [0,\ t_0]$. С другой стороны, на отрезке времени $[t_0,\ T]$ продукция не производится, поэтому при исчерпании запаса готовой продукции $S(t)$ объем продаж $C(t) = 0$. Таким образом, задача определения оптимального выпуска в классе функций (1.26) сводится к задаче отыскания величин $(X^0,\ t_0)$, максимизирующих функцию

$$J(X^0, t_0) = N(T) - D(T) \to \max, \qquad (1.27)$$

при условиях

$$\dot{N}(t) = \begin{cases} p(t)C^0 - Z(X^0) - v(t), & t \in [0, t_0] \\ p(t)C^0 - v(t), & t \in [t_0, t_1], \\ -v(t), & t \in [t_1, T] \end{cases} \qquad N(0) = N_0; \qquad (1.28)$$

$$\dot{S}(t) = \begin{cases} X^0 - C^0 - \alpha S(t), & t \in [0, t_0] \\ -C^0 - \alpha S(t), & t \in [t_0, t_1], \\ 0 & t \in [t_1, T] \end{cases} \qquad S(0) = S_0, \quad S(t_1) = 0; \qquad (1.29)$$

$$\dot{D}(t) = \begin{cases} rD(t) + X^0 \sum_j a_j p_j(t) + Z(X^0) - v(t), & t \in [0, t_0] \\ rD(t) - v(t), & t \in [t_0, T] \end{cases}, \qquad D(0) = D_0; \qquad (1.30)$$

$$N(t) \geq 0; \quad D(t) \geq 0;$$

$$0 \leq X^0 \leq K; \qquad 0 \leq t_0 \leq T; \quad 0 \leq v(t) \leq v_{\max}.$$

Из (1.28) и (1.30) нетрудно получить

$$N(T) = \int_0^T p(t)C^0 dt - \int_0^T v(t)dt, \qquad (1.31)$$

$$D(T) = D_0 e^{rT} + \int_0^{t_0} e^{r(T-t)} (X^0 \sum_j a_j p_j(t) + Z(X^0))dt - \int_0^T e^{r(T-t)} v(t)dt, \qquad (1.32)$$

откуда

$$J=\int_0^T p(t)C^0dt-D_0e^{rT}-\int_0^{t_0}e^{r(T-t)}(X^0\sum_j a_jp_j(t)+Z(X^0))dt-\int_0^T v(t)(1-e^{r(T-t)})dt=$$

$$=\int_0^T pC^0dt-D_0e^{rT}-e^{rT}(X^0\sum_j a_jp_j(t)+Z(X^0))(1-e^{-rt_0})-\int_0^T v(t)(1-e^{r(T-t)})dt\to\max_{\{X^0,t^0,v(t)\}}.$$

В данном выражении первое слагаемое не зависит от управлений, а второе и третье – независимы между собой, т.е. задача максимизации функционала J может быть сведена к двум задачам оптимизации следующего вида:

$$(X^0\sum_j a_jp_j+Z(X^0))(1-e^{-rt_0})\to\max_{X^0,t_0};\quad 0\le X^0\le K;\quad 0\le t_0\le T;\qquad(1.33)$$

$$\int_0^T v(t)(1-e^{r(T-t)})dt\to\min_{v(t)};\quad 0\le v(t)\le v_{\max};\qquad(1.34)$$

$$N(t)\ge 0;\qquad D(t)\ge 0.$$

Рассмотрим первую задачу оптимизации. Управляемые переменные (X^0, t_0) в ней связаны дополнительными ограничениями на запас готовой продукции (1.29). Динамика величины $S(t)$ для управления вида (1.26) может быть найдена в явном виде:

$$S(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}(X^0-C^0+e^{-\alpha t}(C^0+\alpha S_0-X^0)), & t\in[0,t_0]\\ \dfrac{1}{\alpha}(X^0e^{\alpha(t_0-t)}-C^0+e^{-\alpha t}(C^0+\alpha S_0-X^0)), & t\in[t_0,t_1]\\ 0, & t\in[t_1,T]\end{cases}.\qquad(1.35)$$

Типичный вид функции $S(t)$ приведен на рис. 1.2.

При условии превышения выручки от продаж продукции над издержками производства (что обеспечивается неравенством $X^0\ge X^*$ и тем, что произведенная продукция реализуется полностью) максимум прибыли будет достигаться при максимальном объеме продаж, т.е. при условии $t_1=T$. В этом случае запас произведенной на отрезке времени $[0,\ t_0]$ продукции должен быть достаточно велик для покрытия конечного спроса на всем отрезке $[0,\ T]$ с учетом потерь запасов. Это условие соответствует равенству $S(T)=0$.

Тогда из (1.35) может быть получено явное выражение для зависимости величины $S(T)$ от выбранных значений X^0 и t_0:

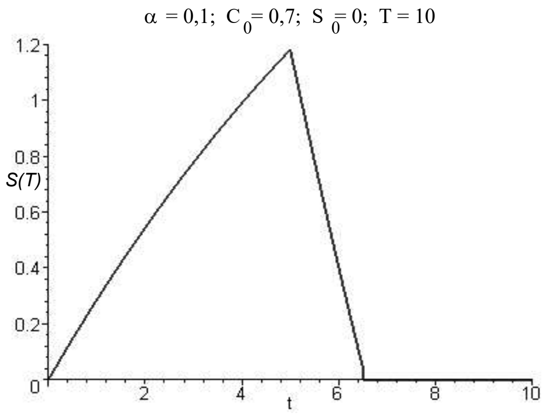

Рис. 1.2. Вид функции S(t)

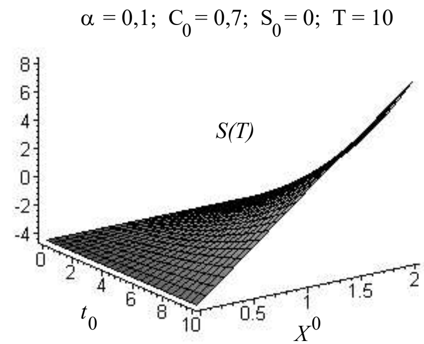

Рис. 1.3. Зависимость S(T) от параметров X^0 и t_0

$$S(T) = \frac{1}{\alpha}(X^0 e^{\alpha(t_0 - T)} - C^0 + e^{-\alpha T}(C^0 + \alpha S_0 - X^0)) = 0. \qquad (1.36)$$

Таким образом, при фиксированных параметрах α, C^0, S_0 и T может быть определен конкретный вид зависимости $S(T)$ от X^0 и t_0. Пример такой зависимости приведен на рис. 1.3.

Тогда X^0 и t_0, такие, что $S(T) = 0$, соотносятся следующим образом (рис. 1.4):

$$X^0 = \frac{C_0(1 - e^{\alpha T}) - \alpha S_0}{1 - e^{\alpha t_0}}. \qquad (1.37)$$

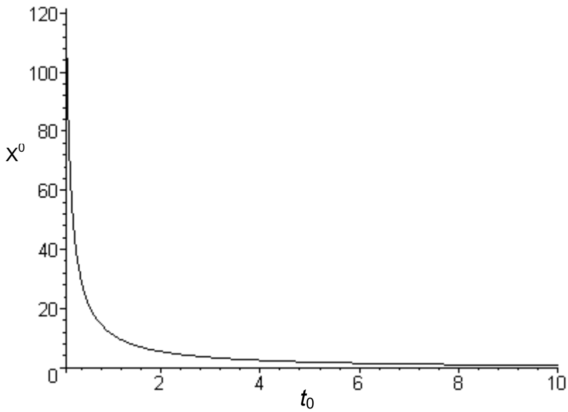

Рис. 1.4. Зависимость $X^0(t_0)$

Параметры импульсного режима X^0 и t_0, обеспечивающие минимизацию издержек производства при полной реализации продукции, могут быть найдены из (1.37).

Тогда, подставляя в функцию (1.33) значение t^0, полученное из условия оптимальности (1.37), получим задачу условной оптимизации функции:

$$F_1(X^0) = (X^0\sum_j a_j p_j + Z(X^0))(1-(1-\frac{C^0(1-e^{\alpha T})+\alpha S_0}{X^0})^{-\frac{r}{\alpha}}) \to \max_{X^0}, \quad (1.38)$$

при ограничениях

$$0 \le X^0 \le K, \quad 0 \le \frac{1}{\alpha}\ln(1-\frac{C^0(1-e^{\alpha T})+\alpha S_0}{X^0}) \le T.$$

Из этой задачи может быть определена конкретная величина оптимального выпуска X^0, зависящая от вида функции издержек $Z(X)$, величин параметров производственной системы и рынков факторов производства и выпускаемой продукции. Пример функции $F_1(X)$ для линейной функции издержек приведен на рис. 1.5.

Видно, что полученная величина X^0 не лежит на границе множества допустимых значений. Это означает, что найденный нами "импульсный" режим выпуска не является оптимальным в классе произвольных кусочно-постоянных процессов.

Исследуем теперь случай произвольной кусочно-постоянной функции выпуска продукции. Выясним, какое количество точек переключения имеет оптимальный процесс.

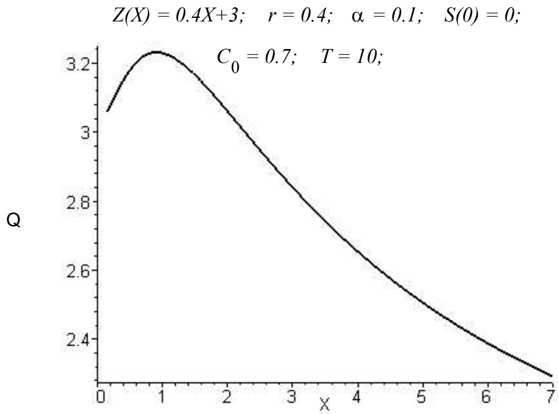

Рис. 1.5. Зависимость $F_1(X)$ для линейной функции издержек

Лемма 1.3. *При увеличении числа точек разрыва управления X(t) значения функционала монотонно возрастают.*

Доказательство. Пусть $X^*(t)$ – некоторый кусочно-постоянный режим выпуска продукции, содержащий n точек переключения. Будем предполагать, что он удовлетворяет сформулированному выше необходимому условию оптимальности: объем выпускаемой продукции полностью покрывает конечный спрос. Рассмотрим отрезок времени $[t_0, t_1]$, такой, что

$$X^*(t) = \begin{cases} X_1, & t \in [t_0, s] \\ 0, & t \in [s, t_1] \end{cases}. \tag{1.39}$$

Определим режим $X'(t)$ с $n+2$ точками переключения следующим образом:

$$X'(t) = \begin{cases} X_1, & t \in [t_0, \tau_1] \\ K, & t \in [s, \tau_2] \\ 0, & t \in [\tau_1, s] \bigcup [\tau_2, t_1] \end{cases}, \tag{1.40}$$

где $\tau_1 = \max\{\tau \in [t_0, s] : S(s)|_{X'(t)} = 0\}$;

$\tau_2 \in [s, t_1]$ – такое, что $S(\tau_2)|_{X'(t)} = S(\tau_2)|_{X^*(t)}$.

Нетрудно проверить, что на определенном таким образом режиме $X'(t)$ конечный спрос также будет удовлетворяться полностью. Тогда кумулятивный доход предприятия $N(T)$ не изменится.

Рассмотрим, каким образом изменится величина задолженности $D(T)$. Из (1.32) имеем

$$D(T)|_{X'(t)} = D_0e^{rT} + \int_0^T e^{r(T-t)}(X'(t)\sum_j a_j p_j(t) + Z(X'(t)))dt - \int_0^T e^{r(T-t)}v(t)dt =$$

$$= D_0e^{rT} + \int_0^{\tau_1} e^{r(T-t)}(X^*(t)\sum_j a_j p_j(t) + Z(X^*(t)))dt + \int_s^{\tau_2} e^{r(T-t)}(X_1\sum_j a_j p_j(t) + Z(X_1))dt +$$

$$+ \int_{t_1}^T e^{r(T-t)}(X^*(t)\sum_j a_j p_j(t) + Z(X^*(T)))dt - \int_0^T e^{r(T-t)}v(t)dt.$$

Тогда

$$D(T)|_{X'(t)} - D(T)|_{X^*(t)} = e^{rT}(X_1\sum_j a_j p_j(t) + Z(X_1))(\int_s^{\tau_2} e^{-rt}dt - \int_{\tau_1}^s e^{-rt}dt) =$$

$$= -e^{rT}(X_1\sum_j a_j p_j(t) + Z(X_1))(e^{-r\tau_2} + e^{-r\tau_1}) < 0. \bullet$$

Таким образом, установлено, что с увеличением количества точек разрыва процесса $X(t)$ значение функционала задачи возрастает.

С другой стороны, очевидно, что величина J^* ограничена сверху. Следовательно, при любом заданном управлении $v(t)$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} J(X(t), v(t))$.

Для нахождения данного предела рассмотрим следующий процесс выпуска продукции. Разобьем отрезок $[0, T]$ на n равных подынтервалов точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ и определим процесс выпуска продукции $X_n(t)$ как

$$X_n(t) = \begin{cases} K, & t \in [t_{i-1}, t_{i-1} + \xi] \\ 0, & t \in [t_{i-1} + \xi, t_i] \end{cases}; \quad i = 1,..,n, \tag{1.41}$$

где $0 < \xi < (t_i - t_{i-1})$ – наибольшая величина, такая, что $S(t_i)|_{X_n(t)} = 0$. Траектория процесса $X_n(t)$ приведена на рис. 1.6.

Данный объем выпуска полностью удовлетворяет конечный спрос C^0 и не образует излишков готовой продукции в конце интервала планирования. Кумулятивный доход $N(T)$ на этом режиме максимален и равен pC^0T.

Общие затраты на производство могут быть найдены из формулы (1.32):

$$D(T)|_{X_n(t)} = D_0e^{rT} + \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\xi} e^{r(T-t)}(K\sum_j a_j p_j(t) + Z(K))dt - \int_0^T e^{r(T-t)}v(t)dt =$$

$$= D_0e^{rT} + e^{rT}(K\sum_j a_j p_j(t) + Z(K))\sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\xi} e^{-rt}dt - \int_0^T e^{r(T-t)}v(t)dt.$$

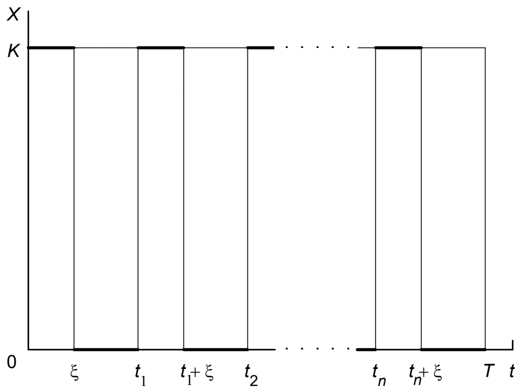

Рис. 1.6. Вид процесса $X_n(t)$

Рассмотрим слагаемое, зависящее от объема выпуска $X_n(t)$. При больших n, пользуясь теоремой о среднем, получаем

$$R(X_n(t)) = e^{rT}(K\sum_j a_j p_j(t) + Z(K))\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\xi} e^{-rt}dt =$$

$$= e^{rT}(K\sum_j a_j p_j(t) + Z(K))\sum_{k=1}^{n} e^{-rt_k}\xi. \qquad (1.42)$$

Из условия $S(t_k) = 0$ имеем

$$\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\xi} Ke^{\alpha(t-t_k)}dt - \int_{t_{k-1}}^{t_k} Ce^{\alpha(t-t_k)}dt = 0;$$

$$\xi = \frac{1}{\alpha}\ln(\frac{C}{K}(e^{\frac{\alpha T}{n}} - 1) + 1). \qquad (1.43)$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} R(X_n(t)) = \frac{1}{\alpha}e^{rT}(K\sum_j a_j p_j(t) + Z(K))\lim_{n\to\infty}(\ln(\frac{C}{K}(e^{\frac{\alpha T}{n}} - 1) + 1)\sum_{k=1}^{n} e^{-rt_k}) =$$

$$= \frac{C}{r}\frac{(K\sum_j a_j p_j(t) + Z(K))}{K}(e^{rT} - 1). \qquad (1.44)$$

Л е м м а 1 . 4 . *Для любого режима выпуска $X(t)$, такого, что $C(t) = C^0$, величина производственных затрат не меньше чем (1.44).*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Запишем величину $X(t)$ в виде

$$X(t) = \beta(t)K,$$

где K – величина производственной мощности, $0 \le \beta(t) \le 1$ – процент использования производственной мощности. Тогда производственные затраты предприятия составят

$$R(X(t)) = \int_0^T e^{r(T-t)}(X(t)\sum_j a_j p_j(t) + Z(X(t)))dt =$$

$$= \int_0^T e^{r(T-t)}(\beta(t)K\sum_j a_j p_j(t) + Z(\beta(t)K))dt \geq (K\sum_j a_j p_j(t) + Z(K))\int_0^T e^{r(T-t)}\beta(t)dt.$$

в силу вогнутости функции издержек.

Минимум последнего интеграла при условии $C(t) = C^0$ достигается при $\beta(t) \equiv \frac{C^0}{K}$. Таким образом, получаем

$$R(X(t)) \geq ((K\sum_j a_j p_j(t) + Z(K))\int_0^T e^{r(T-t)}\beta(t)dt \geq \frac{C^0}{K}(K\sum_j a_j p_j(t) + Z(K))\int_0^T e^{r(T-t)}dt =$$

$$= \frac{C}{r}\frac{(K\sum_j a_j p_j(t) + Z(K))}{K}(e^{rT} - 1). \bullet$$

Итак, для задачи управления предприятием при отсутствии локальной рентабельности структура решения существенно зависит от уровня конечного спроса на продукцию C^0. При уровне спроса, достаточно большом для покрытия текущих производственных издержек ($C^0 \geq X^*$), оптимальный процесс удовлетворяет условиям пункта 1.1 и имеет весьма простую структуру: наращивать выпуск до достижения уровня C^0. При более низком уровне спроса структура оптимального режима определяется следующей теоремой:

Т е о р е м а 1 . 2 . *Если $Z(X)$ вогнута, $Z(0) = 0$ и $\forall X < X^*$ $Z(X) < 0$, то при уровне спроса $C^0 < X^*$ существует скользящий режим выпуска продукции, минимизирующий издержки производства и целиком покрывающий конечный спрос C^0. Минимизирующей последовательностью для данного режима является найденная выше последовательность управлений $\{X_n(t)\}$, определяемых условием (6.41).*

Доказательство теоремы непосредственно следует из результатов лемм 1.3 и 1.4.

На рис. 1.7 изображен вид оптимального управления выпуском продукции $X(t)$, а также траектории кумулятивной прибыли $N(t)$ и объема запаса $S(t)$, полученные численно и отражающие структуру найденного выше режима функционирования.

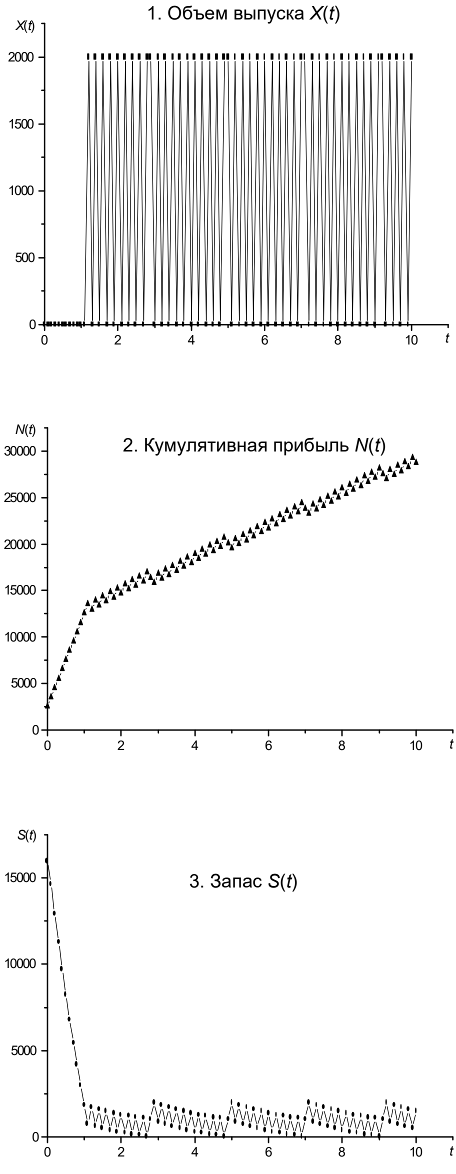

Рис. 1.7. Вид оптимального процесса

Рассмотрим теперь задачу оптимизации выплат по погашению задолженности (1.34). Минимизируемый функционал линеен по $v(t)$, и в силу того, что $(1 - e^{r(T-t)}) < 0 \ \forall t < T$, достаточным условием минимума является $v(t) = v_{\max} \ \forall t < T$, где $v_{\max}$ такое, что выполнено одно из условий $N(t) = 0$ либо $D(t) = 0$. Отсюда вытекает следующее необходимое условие оптимальности процесса выплат $v(t)$:

$$(N(t)D(t))|_{v^*(t)} = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{1.45}$$

Следовательно, оптимальный процесс выплат задолженности аналогичен найденному в п. 6.1 процессу (6.21):

$$v^*(t) = \begin{cases} v_{\max}, & 0 \le t \le t_0 \\ 0, & t_0 < t \le T \end{cases},$$

т.е. и в данном случае предприятию выгодно расплатиться с долговыми обязательствами как можно быстрее.

1.3. Влияние инфляции цен на оптимальный режим функционирования предприятия

Одним из наиболее важных факторов, способствующих возникновению неплатежей предприятий, является инфляция цен. Причинами этого являются, с одной стороны, желание приобрести как можно большее количество сырья по более низким ценам в условиях инфляционных ожиданий даже при недостатке оборотных средств, а с другой – обесценивание задолженности предприятия при повышении уровня цен, дающее возможность даже с учетом штрафов выплачивать меньше реальной цены продукции.

В исходной постановке задачи неявно предполагалось, что цены на продукцию предприятий постоянны, т.е. инфляция цен отсутствует. Этим отчасти объясняется структура найденного выше оптимального режима выплат $v^*(t)$ (1.20), при котором задолженность погашается немедленно и в полном объеме в условиях локальной рентабельности. Данный случай соответствует "классической" рыночной системе с низкой инфляцией, когда рост задолженности возможен только за счет технологической неэффективности предприятия.

Однако в условиях высоких темпов инфляции невыплата долга является оптимальной стратегией не только для технологически неэффективного предприятия. Изучим это явление при помощи рассматриваемой модели функционирования предприятия. Предположим, что накопленная чистая прибыль $N(t)$ вкладывается в актив, на который начисляются проценты по норме σ, а цены на все виды продукции $p_i(t)$ и издержки производства $Z(t, X)$ растут с течением времени с темпом δ:

$$p_i(t) = p_i^0 e^{\delta t}, \qquad Z(t, X) = z(X)\, e^{\delta t}.$$

Тогда уравнения (1.2) и (1.3) исходной задачи запишутся в виде

$$\dot{N}(t) = \sigma N(t) + p(t)\, e^{\delta t}\, C(t) - v(t) - z(X)\, e^{\delta t}, \tag{1.46}$$

$$\dot{D}(t) = rD(t) + X(t)\sum_j a_j p_j^0 e^{\delta t} - v(t). \tag{1.47}$$

Рассмотрим приведенные величины счета и задолженности:

$$N_1(t) = N(t)\, e^{-\delta t}, \quad D_1(t) = D(t)\, e^{-\delta t}.$$

Из (1.46), (1.47) могут быть найдены уравнения их динамики:

$$\dot{N}_1(t) = (\sigma - \delta) N_1(t) + p(t)C(t) - v_1(t) - z(X);$$

$$\dot{D}_1(t) = (r - \delta) D_1(t) + X(t)\sum_j a_j p_j^0 - v_1(t),$$

где $v_1(t) = v(t)\ e^{-\delta t}$ – приведенная величина выплат задолженности.

Нетрудно видеть, что запись функционала предприятия $J(X(\cdot),\ v(\cdot))$ в приведенных показателях будет совпадать с записью в абсолютных значениях $N(t)$ и $D(t)$ с точностью до некоторого положительного и не зависящего от управлений множителя. Тогда, интегрируя данные уравнения и подставляя найденные $N_1(T)$ и $D_1(T)$ в критериальный функционал, получим

$$J_1(X(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^T (pC(t) - v_1(t) - z(X(t)))e^{(\sigma-\delta)(T-t)}dt \ -$$

$$-\int_0^T (X(t)\sum_j a_j p_j(t) - v_1(t))e^{(r-\delta)(T-t)}dt \to \max_{\{X(t), v(t)\}}.$$

Как и в предыдущем случае, критериальный функционал может быть разбит на два слагаемых, зависящих соответственно только от финансовой стратегии $v(t)$ и производственной $X(t)$.

$$J_v = \int_0^T v_1(t)(e^{(r-\sigma)(T-t)} - 1)e^{-\delta(T-t)}dt = e^{-\delta T}\int_0^T v(t)(e^{(r-\sigma)(T-t)} - 1)dt \to \max_{v(t)}, \quad (1.48)$$

$$J_X = \int_0^T (pC(t) - X(t)\sum_j a_j p_j(t) e^{(r-\sigma)(T-t)} - z(X(t)))e^{(\sigma-\delta)(T-t)}dt \to \max_{X(t)}. \quad (1.49)$$

Из выражений для функций J_v и J_X видно, что темп инфляции δ не оказывает воздействия на стратегию выплат задолженности, если счет и задолженность обесцениваются синхронно. В этом случае основными определяющими факторами становятся норма процентов, начисляемых на счет предприятия σ и норма начисления штрафов r. Действительно, из вариационной задачи (1.48) получим, что максимум J_v достигается на режиме

$$v^*(t) = \begin{cases} v_{\max}, & r - \sigma \geq 0 \\ 0, & r - \sigma < 0 \end{cases}. \quad (1.50)$$

Таким образом, задолженность выплачивается предприятием только в случае, когда норма штрафов превышает норму процентов по счету.

Оптимальная производственная политика предприятия определяется из решения задачи оптимизации (1.49). Сложность в ее решении состоит в том, что объем продаж $C(t)$ представляет собой функцию от выпуска и запаса готовой продукции:

$$C(t) = \begin{cases} C^0, & S(t) > 0 \\ \min\{X(t), C^0\}, & S(t) = 0 \end{cases}. \quad (1.51)$$

Из подынтегрального выражения видно, что при наличии инфляции подынтегральная функция возрастает с течением времени. Поэтому, учитывая ограничение (1.51), получим, что при малых α предприятию выгодно в начале отрезка планирования производить большее количество продукции, нежели может быть немедленно реализовано, создавая запас $S(t)$, а затем реализовывать накопленный запас. Таким образом, инфляция цен приводит к накоплению предприятиями запасов готовой продукции.

Теперь рассмотрим более общий случай, когда темпы роста счета и задолженности являются произвольными функциями времени $\sigma(t)$ и $r(t)$, учитывающими темп инфляции δ. Изучим их влияние на стратегию выплат задолженности предприятием.

Аналогично (1.48) может быть получено следующее выражение для J_v:

$$J_v = \int_0^T v(t)(e^{\int_t^T r(s)-\sigma(s)ds} - 1)dt \to \max_{v(t)} . \qquad (1.52)$$

J_v является линейным функционалом по $v(t)$, поэтому оптимальный режим выплат будет определяться знаком коэффициента $(e^{\int_t^T r(s)-\sigma(s)ds} - 1)$. Логарифмируя данное выражение, можно получить следующие условия оптимальности, аналогичные (1.50):

$$v^*(t) = \begin{cases} v_{\max}, & \int_t^T r(s)-\sigma(s)ds \geq 0 \\ 0, & \int_t^T r(s)-\sigma(s)ds < 0 \end{cases} . \qquad (1.53)$$

Таким образом, видно, что выплаты задолженности в общем случае определяются будущими темпами прироста счета и задолженности. Как правило, будущие значения величин $\sigma(t)$ и $r(t)$ неизвестны предприятию, и планирование выплат может осуществляться только на основе прогнозов. В этом случае в (1.53) $\sigma(t)$ и $r(t)$ будут представлять собой соответственно ожидаемые темпы роста счета и задолженности. Тогда, например, если предприятие размещает свои средства в достаточно надежных активах (например, вкладывает в недвижимость, инвестирует в зарубежные компании и т.д.), то $\sigma(t)$ будет достаточно большой и стабильной величиной. В то же время при больших инфляционных ожиданиях $r(t)$ может стать очень малой и даже отрицательной. Тогда из (1.53) видно, что оптимальной стратегией предприятия в этом случае будет являться перекачивание средств в активы, имеющие более высокую доходность, нежели прирост обязательств перед поставщиками с учетом инфляции, что вызывает задержку выплат и возникновение просроченной задолженности.

Список литературы

1. Гуриев С.М., Поспелов И.Г. *Модель общего равновесия экономики переходного периода* // Мат. моделирование. – 1994. – Т.6, № 2. – С. 3 – 21.
2. Иванов Ю.Н., Токарев В.В., Уздемир А.П. *Математическое описание элементов экономики*. – М.: Физ.-мат. литература, 1994.

3. Катулев А.Н., Колесник Г.В., Федоров В.В. *Оптимальный режим функционирования промышленного комплекса в условиях финансового кризиса* // Мат. моделирование. – 2001. – Т. 13, № 10. – С. 77 – 90.
4. Колесник Г.В. *Оптимальный режим функционирования предприятия в условиях дефицита спроса* // Ученые записки. – Тверь: ТвГУ. – 2000. – Т. 6. – С. 32 – 36.
5. Крутов А.П., Петров А.А., Поспелов И.Г., *Системный анализ развивающейся экономики: модель общественного воспроизводства в плановой экономике* // Мат. моделирование: Методы описания и исследования сложных систем. – М.: Наука, 1989. – С. 200 – 232.
6. Оленев Н.Н., Поспелов И.Г. *Модель инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа*. // Мат. моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. – М.: Наука, 1986. – С. 163 – 173.
7. *Основы теории оптимального управления* / Под ред. В.Ф.Кротова – М.: Высшая школа, 1991.
8. Петров А.А. *Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент.* – М.: Наука, 1996.
9. Поспелов И.Г. *Модель поведения производителей в условиях рынка и льготного кредитования* // Мат. моделирование. – 1995. – Т. 7, № 10. – С. 19 – 31.
10. Тер-Крикоров А.М. *Оптимальное управление и математическая экономика.* – М.: Наука, 1977.

§ 2. О состоятельности во времени оптимальных фискально-монетарных политик и задаче Фелпса

В 1927 г. Рамсей опубликовал одну из своих замечательных работ – статью об оптимальной структуре налогообложения. В статической постановке максимизировалась функция полезности потребителя по ставкам налогов, которые входили в ограничения, определяющие условия равновесия. Речь шла о прямых налогах на продукты. Позднее, сохраняя общую идею, в модель стали включать другие налоги. В 1973 г. Фелпс вывел ясное краткое соотношение, связывающее оптимальные в рамсеевском смысле значения ставки налога с дохода потребителя τ и ставки инфляционного налога n - номинального процента (по определению Фелпса). Оно имеет вид

$$\frac{\partial(\tau z + nm)/\partial\tau}{z} = \frac{\partial(\tau z + nm)/\partial n}{m} = const,$$

где z – трудовой доход представительного потребителя; m – реальные денежные остатки у потребителя; nm – инфляционный налог. Таким образом, (τz + nm) – полный доход бюджета от подоходного и инфляционного налогов.

Соотношение Фелпса говорит, что маргинальный вклад в бюджет с единицы каждого источника один и тот же. Этот результат допускал (если не утверждал) положительный инфляционный налог и тем самым поставил проблему применимости правила Фридмана о нулевом оптимальном налоге на ликвидность. Соотношение опирается на предположение о том, что бюджетное ограничение правительства может быть представлено в виде

$$\tau z + nm = const\,,$$

где z и m есть оптимальная реакция потребителя на политику τ и n, а константа (или заданная функция времени) в правой части равенства не зависит от τ и n. Фелпс аргументировал это так: сумма (τz + nm) является вычетом из дохода потребителя, а последний влияет на спрос потребителя на продукты и предложение труда. Чтобы этого не происходило, он требует, чтобы сумма *эффектов дохода* оставалась инвариантной к изменениям политики (τ, n). Здесь при выводе аналогичного соотношения потребуем, чтобы инвариантным был нулевой дисбаланс бюджета правительства.

При выводе своего соотношения Фелпс не учитывал дифференциальные связи, поэтому оно еще нуждалось в обосновании для динамической модели. Однако, последующие авторы, изучающие рамсеевские политики, не воспроизводили результат Фелпса. Для этого были следующие причины. Во-первых, статическая модель оптимизации равновесия не учитывает некоторых эффектов, свойственных динамике. Другая важная причина, которая ограничивала универсальность соотношения Фелпса, – *несостоятельность* во времени (time inconsistency) рамсеевских политик в задаче Фелпса в динамической постановке, как это показали С. Турновский и У. Брок (1980). Это означает следующее. Оптимальная рамсеевская политика, рассчитанная правительством с момента $t = 0$ до $t = \infty$, оказывается уже не оптимальной для другого правительства, стартующего в некоторый момент $t > 0$, решающего ту же задачу максимизации благосостояния потребителя, не имея каких-либо обязательств перед предшественниками и агентами. Проблема несостоятельности оптимальных политик в экономиках с рациональными ожиданиями и искажающими налогами известна давно, первые идеи содержались в работах Л. Ауэрнхеймера (1974), Т. Сарджента и Э. Уоллеса (1973), Ф. Кидланда и Э. Прескотта (1977). Г. Калво (1978) рассмотрел причины несостоятельности в модели, где правительство финансирует бюджет путем денежной эмиссии. Утверждение, противоречащее на первый взгляд принципу динамического программирования, оказывается верным, если новое правительство не считает себя связанным обязательством продолжать политику своего предшественника и тем самым не оправдывает рациональных ожиданий, определивших прошлые решения агентов. В частности, начальные условия по таким фазовым переменным, как реальные деньги и облигации, рассматриваются уже не фиксированными из предыдущего развития, а свободными: передаются их номинальные значения, а не реальные. Реальные начальные значения определяются ценами равновесия, которые заново определяются на рынке после объявления новым правительством своей политики. Это приводит к условиям трансверсальности в начале каждого старта, которые обнуляют соответствующие сопряженные переменные. В результате получаем режим

Фридмана с нулевой ставкой налога τ и несбалансированным бюджетом правительства. Эта проблема и пути ее решения подробно обсуждаются во втором параграфе.

Несмотря на отмеченные ограничения, соотношение Фелпса очень наглядно и кажется «почти очевидным». Представляется интересным сформулировать условия, при которых оно или его аналог получаются из динамической модели. В одном частном случае (см. Сотсков, 2001), соотношение Фелпса получено из анализа динамических режимов в модели Сидравского с функцией полезности от «полного потребления» вида $U(c+h(l)+v(m))$, где субполезности труда $h(l)$ и реальных денег $v(m)$ могут быть выражены в единицах потребительского блага c. В общем случае, рассмотренном здесь, приходится переходить к стационарным режимам. Делаются два предположения. Первое, что дисконт функции полезности совпадает с реальным процентом. (Это условие можно считать приемлемым для малой открытой экономики.) Второе предположение, что правительства принимают реальное богатство потребителя, накопленное из прошлого, как данное. Это аналог условия «честности» правительства в смысле Ауэрнхеймера (1974). В пользу него можно сказать, что правительство, которое максимизирует благосостояние потребителя, не должно покушаться и на его финансовое богатство. Мы показываем, что при выполнении этих условий агрегированная (включающая налог, темп денежной эмиссии, государственные расходы и долговую политику) рамсеевская политика стационарна и состоятельна во времени, т.е. следующие правительства тоже не будут от нее отклоняться. Таким образом, задача выбора оптимальной политики становится фактически статической и возможно получить характеризацию ее решения в духе Фелпса. Стационарное решение задачи означает, однако, что переменные модели могут скачком изменить свои значения с исторически сложившихся на стационарные. Часть политики правительства состоит в перестройке начальных условий путем операций на долговом рынке.

В отличие от финансового производственный капитал не допускает «мгновенной» перестройки. В связи с этим рассматривается модель роста с капиталом, входящим линейно в производственную функцию (типа АК-функции Ромера), и гомотетичными предпочтениями потребителя. В этих условиях исходная модель может быть приведена к модели без капитала и для нее аналогичным образом получено соотношение типа Фелпса.

Обобщения правила Фелпса связаны с рассмотрением динамической постановки и отказом от неизменности суммы эффектов дохода в бюджете правительства (проблема состоятельности не снимается). Вместо правила Фелпса при этом получаются другие соотношения типа «distorted Friedman rule», см. С. Турновский (1987, 1995, 2000). Эффектное и простое правило оптимальной таксации для стационарного режима (при аддитивной сепарабельности функции полезности по деньгам) получил C. Chamley (1985): $\varepsilon = \nu/(1+\nu)$, где ε – эластичность спроса на реальные деньги по номинальному проценту; ν – маргинальные издержки эффективности от таксации.

В настоящей работе рассматривается модель Сидравского общего вида с внешними заимствованиями, приводятся условия равновесия и условия оптимальности агрегированной политики и обсуждается проблема состоятельности. При этом базовыми для нас были статья С. Турновского и У. Брока (1980), а также более поздние работы С. Турновского. В них изучались разные постановки задач об оптимальной политике в связи с проблемой состоятельности. Наша работа, однако, не укладывается в рассмотренные там постановки, так как не является моделью замкнутой или малой открытой экономики, которые изучались в этих статьях. Здесь не вводятся паушальные налоги, из-за чего формулировки результатов иногда противоположны. Есть и более мелкие отличия: в нашей постановке реальный процент не связан с дисконтом, модель рассматривается в дискретном времени и пр. Основные результаты этой части – несостоятельность во времени агрегированных рамсеевских политик, если правительства свободны от обязательств (утверждение 2.1) и состоятельность оптимальных политик, когда такие обязательства есть (утверждение 2.1'). Далее нами описывается модель сбалансированного роста с капиталом. Она редуцируется к модели без капитала, и затем выводятся условия стационарного равновесия, соответствующего постоянной политике (здесь мы опираемся на результаты предыдущего параграфа). В заключение приводится вывод соотношения Фелпса для модели сбалансированного роста и формулируется основной результат – утверждение 2.2. По модели роста базовая модель и некоторые идеи были взяты из статьи Р. Лукаса (2000), но в отличие от нее мы вводим эндогенный рост типа технического прогресса при нерастущем населении.

2.1. О состоятельности во времени рамсеевских политик

Опишем базовую модель, на которой рассматриваются все вопросы. Это будет модель Сидравского (1967) общего вида.

Описание модели. Имеются три сектора: потребитель, производство и правительство (фискально-монетарная власть).

Потребитель решает задачу:

$$max \sum_{t=0}^{\infty} (1+\rho)^{-t}\, U(C_t, M_t/p_t, G_t, l_t)$$

при бюджетном ограничении

$$M_{t+1} = M_t + (1-\tau_t)(W_t l_t + \Pi_t + S_t K_t) + (1+n_t)B_t - B_{t+1} - p_t C_t - p_t I_{t+1},$$

$$K_{t+1} = K_t(1-\delta) + I_{t+1}$$

и начальных условиях $K_0 > 0$, $M_0 > 0$, $B_0 > 0$.

Принятые обозначения: C_t – частное потребление; M_t – денежные остатки (бумажные деньги, депозиты и чеки), которыми располагает потребитель в периоде t; p_t – цены; G_t – общественное потребление; l_t – рабочее время; W_t – ставка заработной платы; Π_t – прибыль производства; τ_t – ставка налога с дохода от производства; S_t – процент за аренду капитала в денежном выражении; B_{t+1} – сумма денег, выделяемых в периоде t на покупку одноперидных государственных долговых обязательств (облигаций), с номинальным процентом n_t; K_t – капитал; I_t – инвестиции в капитал; δ – темп обесценения капитала; ρ – дисконт.

Сумма $M_0/p_0 + B_0/p_0 = \overline{M}_0 + \overline{B}_0$ есть реальное финансовое богатство потребителя в начальном периоде. Неизвестными в этой задаче являются величины C_t, M_t, l_t, B_t, K_t; значения переменных параметров $\tau_t, \Pi_t, S_t, W_t, n_t, G_t, p_t$ считаются потребителем заданными для всех $t = 0, 1, \ldots$, постоянные параметры модели – ρ, δ. Для существования решения задачи потребуем ниже выполнения условия "отсутствия пирамид".

Предполагается, что одноперидная функция полезности $U(C, \overline{M}, G, l)$ ($\overline{M} = M/p$) вогнута и дважды непрерывно дифференцируема по всем переменным; $U'_c > 0$, $U'_G > 0$, $U'_l < 0$, $\mathrm{sgn}\, U'_M = \mathrm{sgn}\,(\overline{M}^* - \overline{M})$, где $\overline{M}^*$ – уровень насыщения потребителя реальными денежными остатками. Здесь предполагается, что при $\overline{M} > \overline{M}^*$ издержки хранения денег перевешивают выигрыши.

Второй сектор, *производство*, описывается производственной функцией общего вида: $F(K, l)$, вогнутой, дважды дифференцируемой по K, l.

Производство в каждом периоде t максимизирует прибыль по K_t, l_t, вычитая из выручки зарплату и процент за арендованный капитал K_t:

$$\max\ [p_t F(K_t, l_t) - W_t l_t -- S_t K_t] = \Pi_t \text{ при заданных } p_t\,,\ W_t\,,\ S_t.$$

Третий сектор – *правительство*. Предполагается, что оно контролирует ставку налога τ_t, государственные расходы G_t , внешний долг D_t, а также темп денежной эмиссии $\theta_{t+1} = (M_{t+1} - M_t)/M_t$. Задача правительства в каждом периоде состоит в поддержании баланса государственного бюджета (он будет приведен ниже). При этом считается, что правительство может мгновенно реагировать на изменения спроса потребителя на денежную массу и облигации путем купли-продажи облигаций через центральный банк.

Равновесие совершенного предвидения. Выбор значений (τ_t, G_t , θ_t, D_t) для всех t от 0 до ∞ назовем *политикой* правительства. Предполагается, что, коль скоро политика объявлена, она затем проводится правительством. Потребитель же со своей стороны обладает совершенным предвидением (perfect foresight) в отношении соответствующих параметров экономического равновесия. Введем понятие равновесия.

При заданной политике правительства (τ_t, G_t , θ_t, D_t) параметры p_t, n_t, Π_t, W_t, S_t называются *равновесием совершенного предвидения*, если запланированные траектории спроса и предложения C_t, M_t, l_t, B_t, K_t решают задачи потребителя и производителя и при этом в каждый момент времени выполняется баланс по ресурсам в системе

$$C_t + I_t + G_t = F(K_t, l_t) + D_{t+1} - (1+\alpha)D_t\,,$$

где D_t , t = 0,1, … – заданная траектория внешнего долга правительства; α – процент по внешним долговым обязательствам, который считаем заданным и постоянным.

Описана модель конкурентного равновесия: потребитель и производитель действуют децентрализованно, принимая параметры равновесия и политику правительства как заданные. Перепишем задачу потребителя в эквивалентном виде в реальных переменных:

$$max \sum_{t=0}^{\infty} (1+\rho)^{-t}\, U(C_t,\ \overline{M}_t,\ G_t,\ l_t), \tag{2.1}$$

$$(1+\pi_{t+1})\,\overline{M}_{t+1} = \overline{M}_t + (1-\tau_t)(\overline{W}_t\, l_t + \overline{\Pi}_t + \overline{S}_t K_t) + (1+n_t)\,\overline{B}_t - (1+\pi_{t+1})\,\overline{B}_{t+1} - C_t - I_{t+1}, \tag{2.2}$$

с начальными условиями K_0, $\overline{M}_0$, $\overline{B}_0$ (в равновесии значения $\overline{M}_0$ и $\overline{B}_0$ определятся эндогенно). Здесь приняты следующие обозначения:

$$\pi_{t+1} = (p_{t+1} - p_t)/p_t\,,\ \overline{M}_t = M_t/p_t,\ \overline{W}_t = W_t/p_t,\ \overline{\Pi}_t = \Pi_t/p_t\,,\ \overline{S}_t = S_t/p_t\,,\ \overline{B}_t = B_t/p_t.$$

В задаче (2.1), (2.2) ищутся траектории (C_t, $\overline{M}_t$, l_t, $\overline{B}_t$, K_t); величины π_t, $\overline{\Pi}_t$, τ_t, $\overline{W}_t$, $\overline{S}_t$, n_t, а также G_t рассматриваются потребителем как заданные при всех $t = 0, 1, ...$

Выпишем условия первого порядка для задачи (2.1), (2.2), учитывая, что

$$1+ n_t = (1+r_t)(1+\pi_t),$$

откуда в первом приближении $n_t \approx r_t+\pi_t$, где r_t − реальный процент по внутренним долговым обязательствам. Условия по C_t, $\overline{M}_t$, l_t, $\overline{B}_t$, K_t имеют вид

$$U_c'(t) = \lambda_t\,, \quad U'_m(t) = \lambda_t(r_t+\pi_t), \quad U'_l(t) = -\lambda_t(1-\tau_t)\,\overline{W}_t\,,$$

$$\lambda_t = \lambda_{t-1}(1+\rho)/(1+r_t), \quad r_t = \overline{S}_t(1-\tau_t) - \delta.$$

К этому следует добавить условия трансверсальности по фазовым переменным $\overline{M}_t$, $\overline{B}_t$, K_t:

$$\lim\ \lambda_t \overline{M}_t(1+\rho)^{-t} = 0, \quad \lim\ \lambda_t \overline{B}_t(1+\rho)^{-t} = 0, \quad \lambda_t K_t(1+\rho)^{-t} = 0 \text{ при } t\to\infty.$$

Система уравнений, условия трансверсальности и бюджетное ограничение (2.2) вместе составляют условия равновесия потребителя. К ним следует прибавить условие "отсутствия пирамид":

$$\lim_{t\to\infty} \overline{B}_t(1+\rho)^{-t} = 0.$$

Максимизация прибыли производителем дает выражения для реальной ставки процента на капитал $\overline{S}_t$ и реальной ставки зарплаты $\overline{W}_t$, уравнивающих спрос и предложение между фирмой и потребителем:

$$\overline{W}_t = F'_l(K_t, l_t), \qquad \overline{S}_t = F'_K(K_t, l_t).$$

Выбор правительством темпа денежной эмиссии $\theta_{t+1} = (M_{t+1} - M_t)/M_t$ в реальных терминах означает

$$(1+\pi_{t+1})\,\overline{M}_{t+1} = \overline{M}_t\,(1+\theta_{t+1}).$$

С учетом этого соотношения бюджетный баланс правительства имеет вид

$$\tau_t F(K_t, l_t) + \overline{M}_t\,\theta_{t+1} - G_t = (1+\pi_t)\,(1+r_t)\overline{B}_t - (1+\pi_{t+1})\,\overline{B}_{t+1} + (1+\alpha)D_t - D_{t+1}\,.$$

Баланс по ресурсам получается вычитанием последнего из бюджетного баланса потребителя. Собирая все, получаем условия равновесия совершенного предвидения:

$$U_c'(t) = \lambda_t, \tag{2.3a}$$

$$U'_m(t) = \lambda_t(r_t+\pi_t), \tag{2.3b}$$

$$U'_l(t) = -\lambda_t\,(1-\tau_t)F'_l(K_t, l_t), \tag{2.3c}$$

$$\lambda_t = \lambda_{t-1}(1+\rho)/(1+r_t), \tag{2.3d}$$

$$r_t = F'_K(K_t, l_t)(1-\tau_t) - \delta, \tag{2.3e}$$

$$\theta_{t+1}\overline{M}_t = (1-\tau_t)F(K_t, l_t) + (1+r_t+\pi_t)\overline{B}_t - (1+\pi_{t+1})\overline{B}_{t+1} - C_t - K_{t+1} + K_t(1-\delta), \tag{2.3f}$$

$$C_t + K_{t+1} - K_t(1-\delta) + G_t = F(K_t, l_t) + D_{t+1} - (1+\alpha)D_t\,. \tag{2.3g}$$

К ним надо прибавить условия трансверсальности из задачи потребителя и условие "отсутствия пирамид".

Система (2.3a) – (2.3g) – динамическая система из семи уравнений с семью неизвестными функциями C_t, $\overline{M}_t$, l_t, $\overline{B}_t$, K_t, λ_t, π_t, решается при эндогенно определяемых с помощью условий трансверсальности начальных значениях $\overline{M}_0, \overline{B}_0$, а также заданных K_0 и политике правительства (τ_t, G_t, θ_t, D_t). Заметим, что при заданных M_0 и B_0 и каких-то ценах p_{-0}, сложившихся к моменту $t = 0$, определяемые эндогенно равновесные значения $\overline{M}_0, \overline{B}_0$ получаются скачком цен при $t = 0$.

То, что решение этой системы дает равновесие, гарантируется выпуклостью задачи. Сам же вопрос существования решения, а также его единственности здесь не обсуждается. Предполагается также, что решения являются внутренними точками, что обеспечивается стандартными требованиями к функции полезности и производственной функции.

Из уравнения (2.3d) следует, что стационарное решение возможно только при $r_t \equiv \rho$. Если исключить режимы, в которых U_c' и U'_l стремятся к 0 или ∞ , то r_t не может устойчиво превосходить или быть ниже ρ . Это означает, что реальный процент фактически не может быть инструментом регулирования. В частности, в оптимальном равновесии $r_t \equiv \rho$ (см. ниже).

Задача об оптимальной политике. Среди равновесий нас будет интересовать то, при котором политика доставляет максимум благосостоянию потребителя (т.е. функционалу его задачи). Такие политики иногда называют *рамсеевскими*. Условимся называть *интегрированной* политикой такую рамсеевскую политику, когда оптимизация производится по всем упомянутым инструментам управления (τ_t, G_t , θ_t, D_t).

Рассматривается задача правительства

$$max \sum_{t=0}^{\infty} (1+\rho)^{-t} U(F(K_t, l_t) - G_t - K_{t+1} + K_t(1-\delta) + D_{t+1} - (1+\alpha)D_t, \overline{M}_t, G_t, l_t) \quad (2.4)$$

при ограничениях

$$U_C(t) = \lambda_t, \quad (2.4a)$$

$$U'_l(t) = -\lambda_t(1-\tau_t)F'_l(K_t, l_t), \quad (2.4b)$$

$$U'_M(t) = \lambda_t(r_t + \pi_t), \quad (2.4c)$$

$$r_t = F'_K(K_t, l_t)(1-\tau_t) - \delta, \quad (2.4d)$$

$$(1+\pi_{t+1})\overline{B}_{t+1} + D_{t+1} = (1+\pi_t+r_t)\overline{B}_t + (1+\alpha)D_t + G_t - \tau_t F(K_t, l_t) - \overline{M}_t\,\theta_{t+1}, \quad (2.4e)$$

$$\overline{M}_{t+1} = \overline{M}_t(1+\theta_{t+1})/(1+\pi_{t+1}), \quad (2.4f)$$

$$\lambda_t = \lambda_{t-1}(1+\rho)/(1+r_t). \quad (2.4g)$$

Здесь в функционале (2.4) вместо C_t стоит его выражение из ресурсного баланса, в ограничениях выписаны условия первого порядка, правительственный бюджет и ограничение по динамике реальных денег. Максимизация происходит по параметрам управления правительственной политики: τ_t, G_t , θ_t, D_t , а также по всем переменным модели: l, $\overline{M}_t$, K_t, $\overline{B}_t$, π_t, λ_t, r_t (потребление исключено из модели). Решение этой задачи максимизации должно удовлетворять также условиям трансверсальности из задачи потребителя и условию "отсутствия пирамид". Начальные условия $\overline{B}_0$, $\overline{M}_0$ определяются эндогенно при данных B_0, M_0 скачком цен при $t = 0$, следовательно, точка ($\overline{B}_0$, $\overline{M}_0$) находится на луче $\gamma(B_0, M_0)$, $\gamma > 0$; K_0 и D_0 заданы; λ_0 свободно.

Введем функцию Лагранжа:

$$L_t = (1+\rho)^{-t}U(F(K_t, l_t) - G_t - K_{t+1} + K_t(1-\delta) + D_{t+1} - (1+\alpha)D_t) +$$
$$+ \nu_1(1+\rho)^{-t}[\lambda_t - U_c] - \nu_2(1+\rho)^{-t}[(1-\tau_t)F_l(K_t, l_t)\,\lambda_t + U_l] +$$

$$+\ \nu_3(1+\rho)^{-t}[(r_t+\pi_t)\lambda_t - U_M] + \nu_4\,(1+\rho)^{-t}[F_K(K_t,\ l_t)(1-\tau_t) - \delta - r_t] -$$

$$-\ q_1(1+\rho)^{-t}[\,\tau_t F(K_t,\ l_t) + \overline{M}_t\,\theta_{t+1} - G_t - (1+\pi_t)(1+r_t)\,\overline{B}_t + (1+\pi_{t+1})\,\overline{B}_{t+1} -$$

$$-(1+\alpha)D_t + D_{t+1}] +\ q_2(1+\rho)^{-t}[\,\overline{M}_t\,(1+\theta_{t+1}) - (1+\pi_{t+1})\,\overline{M}_{t+1}] +$$

$$+\ q_3(1+\rho)^{-t}[(1+\rho)\lambda_t - (1+r_{t+1})\,\lambda_{t+1}]\ .$$

Условия оптимальности по отношению к переменным τ_t, G_t, θ_t, D_t, l, $\overline{M}_t$, K_t, $\overline{B}_t$, π_t, λ_t, r_t имеют вид (индекс t иногда опущен)

$$\nu_2 F_l\,\lambda_t - q_1 F - \nu_4 F_K = 0, \tag{2.5a}$$

$$-U_C + U_G + q_1 = 0, \tag{2.5b}$$

$$q_1 - q_2 = 0, \tag{2.5c}$$

$$\begin{gathered}(1+\alpha)[-U_C + \nu_1 U_{CC} + \nu_2\,U_{lC} + \nu_3\,U_{MC} + q_1] - \\ -(1+\rho)[-U_C(t-1) + \nu_1(t-1)U_{CC}(t-1) + \nu_2\,(t-1)U_{lC}\,(t-1) + \\ +\ \nu_3(t-1)U_{MC}\,(t-1) + q_1(t-1)] = 0;\end{gathered} \tag{2.5d}$$

$$\begin{gathered}[U_C F_l + U_l] - \nu_1\,[U_{CC}\,F_l + U_{Cl}] - \nu_2\,[U_{lC}F_l + U_{ll} + F_{ll}U_C(1-\tau_t)] - \\ -\ \nu_3\,[U_{MC}F_l + U_{Ml}] - q_1\,\tau_t F_l + \nu_4 F_{Kl}(1-\tau_t) = 0,\end{gathered} \tag{2.5e}$$

$$\begin{gathered}U_M - \nu_1 U_{CM} - \nu_2\,U_{lM} - \nu_3 U_{MM} - q_1\,\theta_{t+1} + q_2(1+\theta_{t+1}) - \\ -q_2(t-1)(1+\rho)(1+\pi_t) = 0,\end{gathered} \tag{2.5f}$$

$$\begin{gathered}(F_K + 1 - \delta)[U_C - \nu_1(t)U_{CC} - \nu_2 U_{lC} - \nu_3 U_{MC}] - (1+\rho)[U_C(t-1) - \\ -\ \nu_1(t-1)U_{CC}(t-1) - \nu_2(t-1)U_{lC}(t-1) - \nu_3(t-1)U_{MC}(t-1)] - \\ -(1-\tau_t)[\,\nu_2 F_{lK}\lambda_t - \nu_4\,F_{KK}] - q_1\,\tau_t F_K = 0,\end{gathered} \tag{2.5g}$$

$$q_1(1+r_t) - q_1(t-1)(1+\rho) = 0, \tag{2.5h}$$

$$\nu_3\lambda_t + q_1(1+r_t)\,\overline{B}_t - q_1\,(t-1)(1+\rho)\,\overline{B}_t - q_2(t-1)\,(1+\rho)\,\overline{M}_t = 0, \tag{2.5i}$$

$$\nu_1 - \nu_2\,(1-\tau_t)F_l + \nu_3\,(r_t+\pi_t) + q_3(t)(1+\rho) - q_3(t-1)(1+\rho)(1+r_t) = 0, \tag{2.5j}$$

$$\nu_3\lambda_t + q_1(1+\pi_t)\,\overline{B}_t - q_3(t-1)(1+\rho)\lambda_t - \nu_4 = 0. \tag{2.5k}$$

Здесь уравнения (2.5d), (2.5f), (2.5g), (2.5h), (2.5i), (2.5k) рассматриваются начиная с t=1. Должны выполняться следующие условия трансверсальности:

- справа при $t\to\infty$:

$$q_1\,\overline{B}_t(1+\rho)^{-t}\to 0,\quad q_1 D_t(1+\rho)^{-t}\to 0,\quad q_2(t)\,\overline{M}_t\,(1+\rho)^{-t}\to 0,\quad q_3(t)\lambda(t)(1+\rho)^{-t}\to 0;$$

- на левом конце: $q_1(0)B_0 + q_2(0)M_0 = 0$ (вектор $(q_1(0),\ q_2(0))$ должен быть ортогонален лучу $\gamma(B_0,M_0)$, $\gamma>0$); $q_3(0) = 0$;
- из задачи потребителя:

$$\lambda_t \overline{M}_t (1+\rho)^{-t} \to 0, \quad \lambda_t \overline{B}_t (1+\rho)^{-t} \to 0, \quad \lambda_t K_t (1+\rho)^{-t} \to 0 \text{ при } t \to \infty$$

- условия "отсутствия пирамид":

$$\lim_{t\to\infty} \overline{B}_t (1+\rho)^{-t} = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} D_t (1+\rho)^{-t} = 0.$$

Это все необходимые условия существования оптимальной политики.

Проблема состоятельности. Проблема состоятельности во времени политики (и соответствующей равновесной траектории) возникает в мире рациональных ожиданий и искажающих налогов. Экономические агенты принимают сегодняшние решения, основываясь на ожидаемых будущих значениях политики – налогов, ставок процентов, инфляции. Однако когда наступает будущее, новое правительство (если не считает себя связанным планами своего предшественника) уже не учитывает связи параметров политики с прошлыми решениями агентов. А без этих ограничений, вообще говоря, можно найти политику, приводящую к более высоким значениям благосостояния. В принципе такое улучшение возможно до т.н. first best значения, когда искажающие налоги уменьшаются до нуля и потребитель насыщается по услугам ликвидности. Так оно и получается, если правительства не берут на себя обязательств. В частности, если правительство может пользоваться только паушальными налогами, то рамсеевское решение – first best, оно состоятельно. Перейдем к более четким определениям.

В терминах описываемой здесь модели оптимальную состоятельную политику можно определить следующим образом. Пусть найдена оптимальная политика и соответствующая равновесная траектория задачи (2.4) с начальными условиями M_0, B_0, D_0, K_0 на горизонте $[0,\infty]$. Пусть теперь в некотором периоде $t > 0$ агенты находят оптимальное равновесие на горизонте $[t, \infty]$ при начальных условиях M_t, B_t, D_t, K_t . Если найденное решение является продолжением решения, запланированного при $t = 0$, и это верно для любого периода $t > 0$, то оптимальное равновесие назовем *состоятельным*. Формально $\xi(t, 0) = \xi(t, t_0)$ для всех $t \geq t_0 > 0$, где $\xi = (\tau, G, \theta, D, l, \overline{M}, K, \overline{B}, \pi, \lambda, r)$. Если бы все фазовые переменные, включая $\overline{M}_t$, $\overline{B}_t$ и λ_t, наследовались при каждой новой оптимизации, то состоятельность политики была бы следствием принципа динамического программирования. Рассмотрим необходимые последствия дополнительного требования состоятельности политики.

При старте с $t > 0$ решается та же система уравнений (2.5a)–(2.5k) с теми же условиями трансверсальности. Хотя номинальные начальные значения M_t, B_t определены прошлым развитием, реальные значения определяются ценой, которая свободно выбирается в новом равновесии, соответствующем новым ожиданиям. Поэтому в момент t будет выполнено условие трансверсальности: $q_1(t)B_t + q_2(t)M_t = 0$. Свободным будет, как и при $t = 0$, значение непередаваемой технической фазовой переменной λ_t (максимизация производится по всем функциям λ_t на $[t, \infty]$, связанным условиями первого порядка для потребителя). Отсюда следует, что $q_3(t) = 0$.

Таким образом, условия трансверсальности по $\overline{B}_t$, $\overline{M}_t$, λ_t и уравнение (2.5c) дают

$$q_1(t) = q_2(t) = q_3(t) \equiv 0.$$

Тогда имеем $\nu_3 = 0$ (2.5i), $\nu_4 = 0$ (2.5k), $\nu_2 = 0$, $\nu_1 = 0$ (2.5j). Далее $U_C = U_G$ (2.5b), $U_C F_l + U_l = 0$ (2.5e), $\tau_t \equiv 0$ (2.4b), $U_M = 0$ (2.5f), $\pi_t = -r_t$ и, следовательно, $n_t \equiv 0$ (2.4c), т.е. выполняется правило Фридмана. Кроме того, так как $\operatorname{sgn} U_M = \operatorname{sgn}(\overline{M}^* - \overline{M})$, то $\overline{M}_t \equiv \overline{M}^*$. Отсюда $\theta_t = \pi_t = -r_t$. Из (2.4d), (2.5d) и (2.5g) следует, что $r_t \equiv \alpha$, т.е. внутренний процент r_t необходимо должен совпадать с постоянным внешним процентом α. Если $r \neq \rho$, то λ_t, а значит, U_C и U_G стремятся или к 0, или к $+\infty$ (см. (2.4g)). Если предположить, что при $\overline{M} = \overline{M}^*$ потребление ограничено и отделено от нуля, то (2.4g) дает $\lambda_t \equiv const$. Будем считать, что это выполнено. Из уравнений

$$U_C = \lambda, \tag{2.6a}$$

$$U_C = U_G, \tag{2.6b}$$

$$U_C F_l + U_l = 0, \tag{2.6c}$$

$$\rho = F_K - \delta \tag{2.6d}$$

можно выразить C, K, l, G через константу λ, считая $\overline{M}_t \equiv \overline{M}^*$. Далее подставим их, а также значения параметров $\alpha = r = \rho$ и $\theta = -\rho$ в баланс по ресурсам и правительственный баланс и воспользуемся условиями "отсутствия пирамид" для $\overline{M}_t$ и $\overline{B}_t$. Получим стационарные выражения этих балансов (аналогичная работа описывается ниже):

$$-\rho \overline{M}^* - G = \rho(\overline{B}_0 + D_0), \tag{2.6e}$$

$$C + \delta K + G = F(K, l) - \rho D_0. \tag{2.6f}$$

Чтобы удовлетворить обоим балансам, кроме λ придется скачком изменить начальное значение внешнего долга D_0 ($\overline{B}_0$, как уже говорили выше, определяем согласованно с $\overline{M}*$ скачком цены в начальный момент). Формально система (2.6b) – (2.6f) позволяет определить оптимальное стационарное равновесие со значениями *C, K, l, G* в виде режима Фридмана с нулевыми искажающими налогами $\tau = 0$. Однако такое стационарное состоятельное решение не может быть реализовано. Действительно, из бюджетного баланса (2.6e) видно, что оно возможно, только если суммарный долг отрицателен, т.е. является кредитом, причем таким большим, что проценты по нему покрывают все расходы государства, включая убытки от дефляции ($-\rho\overline{M}*$). В то же время естественно ожидать, что B_0 и D_0 – положительны. Решение для K вовсе не обязательно будет равно исходному K_0, при том, что K не может изменяться скачком. Таким образом, приходим к следующему выводу.

Утверждение 2.1. *Интегрированные рамсеевские политики в модели Сидравского несостоятельны во времени.*

Были отмечены две причины несостоятельности решений. Это проблемы скачка с начальных условий на стационарную траекторию и бюджетной сбалансированности самой стационарной траектории. Если в системе имеется производственный капитал, то скачок невозможен, необходимо рассматривать переходную динамику капитала. Здесь она не рассматривается, и до конца настоящего раздела присутствие капитала будет формальным.

Сосредоточимся на вопросе бюджетной сбалансированности. К стационарному режиму Фридмана привело отсутствие обязательств у правительств перед предшественниками и агентами, что формализуется в виде свободного выбора начальных значений $\overline{M}_t, \overline{B}_t$ и λ_t при оптимизации на $[t, \infty]$. Теперь ограничим эту свободу. Потребуем, чтобы выполнялось следующее условие "честности правительства" в духе Ауэрнхеймера (1974):

A) *правительство, которое стартует в периоде $t \geq 0$, может изменить начальное предложение денег и объем долговых обязательств только путем обмена их на открытом рынке.*

Условие предполагает, что правительство, начиная свою деятельность, не прибегает к денежным изъятиям или субсидиям, а идет на рынок, где продает или скупает облигации. Тем самым не возникает скачков уровня цен и реализуется ожидаемое (запланированное) на период t реальное финансовое богатство потребителя $\overline{M}_t + \overline{B}_t$ как заданное начальное условие. Кроме этого, примем предположение

B) *дисконт совпадает с внутренним и мировым реальными процентами:*

$$\rho = r = \alpha .$$

Предположение B) характерно для малой открытой экономики. Покажем, что выполнение условий A) и B) делает систему (2.5a)–(2.5k) статической, а ее решение состоятельным. Условие A) применительно к задаче (2.4) дает условие трансверсальности вида $q_1(t) = q_2(t)$. Но это равенство уже содержится как необходимое условие в уравнении (2.5c). В силу условия B) $\lambda_t = const$, $q_3(t) \equiv 0$, $q_1 = const$ (в силу (2.5h)). После подстановок и упрощений система (7.5a)–(7.5k) сводится к следующей:

$$\nu_2 F_l \lambda - q_1 F - \nu_4 F_K = 0, \tag{2.7a}$$

$$-U_C + U_G + q_1 = 0, \tag{2.7b}$$

$$\begin{gathered}[U_C F_l + U_l] - \nu_1 [U_{CC} F_l + U_{Cl}] - \nu_2 [U_{lC} F_l + U_{ll} + F_{ll} U_C (1-\tau)] - \\ - \nu_3 [U_{MC} F_l + U_{Ml}] - q_1 \tau F_l + \nu_4 F_{Kl} (1-\tau) = 0,\end{gathered} \tag{2.7c}$$

$$U_M - \nu_1 U_{CM} - \nu_2 U_{lM} - \nu_4 U_{MM} - q_1(\rho + \pi) = 0, \tag{2.7d}$$

$$\begin{gathered}(F_K - \delta - \alpha)[U_C - \nu_1(t) U_{CC} - \nu_2 U_{lC} - \nu_3 U_{MC}] - \\ -(1-\tau)[\nu_2 F_{lK} \lambda - \nu_4 F_{KK}] - q_1 \tau F_K = 0,\end{gathered} \tag{2.7e}$$

$$\nu_3 \lambda - q_1 (1+\rho) \overline{M} = 0, \tag{2.7f}$$

$$\nu_1 - \nu_2 (1-\tau) F_l + \nu_3 (\rho + \pi) = 0. \tag{2.7g}$$

Получили статическую систему из семи уравнений (индекс t опущен). Вместе с четырьмя статическими уравнениями (2.4a) – (2.4d) имеем систему из 11 уравнений. Выразим из полученной системы 11 неизвестных: ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, C, τ, G, l, $\overline{M}$, K, π через λ и q_1. (Полагаем, что она разрешается единственным образом.) Так как λ и q_1 – константы, то и все переменные и политики тоже константы. Тогда из уравнения (2.4f) получаем: $\theta = \pi = const$, положим $\overline{B} = \overline{Q}_0 - \overline{M} = const$, где $\overline{Q}_0$ – начальное реальное финансовое богатство потребителя. Подставим найденные выражения постоянных во времени неизвестных через λ и q_1 в балансовые уравнения (2.3g) и (2.4e). Условия трансверсальности для переменных B_t и D_t (совпадающие с условием "отсутствия пирамид") позволяют свернуть по t уравнения (2.3g) и (2.4e) в скалярные ограничения:

$$C + K\delta + G + \alpha D_0 = F(K, l), \qquad (2.7h)$$

$$\tau F(K, l) + \theta \overline{M} - G = \alpha(\overline{B} + D_0). \qquad (2.7i)$$

Константы λ и q_1 теперь выбираются так, чтобы удовлетворялись эти балансы. Любое правительство, которое оптимизирует политику на промежутке $[t, \infty]$, будет решать систему (2.7). Решением этой системы будет оптимальная состоятельная стационарная политика и соответствующее равновесие. Осталось сказать о выходе из начальных условий на стационарную траекторию. При $t = 0$ были заданы K_0, D_0 и $\overline{Q}_0$. Стационарные значения K и $\overline{M}$ определяются из системы (2.7), где $\overline{B} = \overline{Q}_0 - \overline{M}$. На практике новые значения $\overline{M}$ и $\overline{B}$ получаются из исходных путем операций правительства по купле-продаже облигаций на открытом рынке. Относительно капитала предполагаем, что $K_0 = K$.

Утверждение 2.1′. *Если выполнены предположения A) и B), то оптимальная состоятельная стационарная политика и соответствующее равновесие находятся из решения системы* (*2.7*).

Здесь речь шла об агрегированных политиках. В работах С. Турновского и У. Брока (1980, 1987, 2000) изучались различные по составу оптимизируемых параметров задачи рамсеевского типа. Ответы зависели от постановки. В частности, если исключить из оптимизируемых параметров ставку налога τ и фиксировать ее значение, то в системе (2.5a) – (2.5k) исчезает уравнение (2.5a) (и вместе с ним утверждение, что $\nu_2 = 0$). В этом случае систему можно привести к аналогичной статической со стационарным решением, см. С.Турновский (1987).

2.2. Стационарные равновесия в модели сбалансированного роста

Предположим, что основная модель допускает эндогенный рост типа технического прогресса. Опираясь на результаты предыдущего параграфа, будем рассматривать зависимость режимов равновесного стационарного роста от постоянных во времени политик правительства.

Описание модели. Рассматривается внешне та же основная модель. Потребитель решает задачу

$$max \sum_{t=0}^{\infty} (1+\rho)^{-t}\, U(C_t,\, M_t/p_t\,,\, G_t\,;\, l_t)$$

при бюджетном ограничении

$$M_{t+1} = M_t + (1-\tau_t)(W_t\, l_t + \Pi_t + S_t\, K_t) + (1+n_t)B_t - B_{t+1} - p_t\, C_t - p_t\, I_{t+1},$$

$$K_{t+1} = K_t(1-\delta) + I_{t+1}$$

и начальных условиях $K_0 > 0$, $M_0 > 0$, $B_0 > 0$.

Приняты те же обозначения, что и раньше. Как всегда предполагается выполненным условие "отсутствия пирамид" по B_t.

Чтобы свойства модели были совместимы с ростом экономики, предполагается, что функция полезности $U(C,\ M/p,\ G;\ l)$ однородна степени $(1-\sigma)$ по переменным $(C,\ M/p,\ G)$, вогнута и дважды непрерывно дифференцируема по всем переменным. Различные требования по отношению к аргументам функции U связаны с тем, что первые три из них будут расти пропорционально выпуску, тогда как затраты труда не предполагаются растущими. Отметим также важное отличие в требованиях по реальным деньгам в этой и в предыдущей моделях: там оно обеспечивало стационарное решение, здесь обеспечит стационарный рост.

В описании производства мы стремились следовать следующей простой модели эндогенного роста Ромера (1986). Пусть имеется большое число N идентичных фирм, каждая с капиталом K и единицей потенциального труда. Суммарный капитал $k = NK$ представляет одновременно запас знаний в экономике и экстернально воздействует на производство в каждой фирме, что отражено в производственной функции фирмы $F(K,\ k)$. Так как фирма мала, то она воспринимает k как данное. Далее предположим, что производственная функция фирмы типа Кобба–Дугласа, т.е. выпуск

$$y = Q(K\,,\, k) = K^{\varepsilon}\, k^{1-\varepsilon} = N^{1-\varepsilon}K.$$

Таким образом, потенциальный выпуск фирмы $y = AK$ линеен по капиталу K.

Следуя этому описанию, получаем $y_{t+1} = y_t\,(1-\delta) + AI_{t+1} = y_t(1+\ i_{t+1} - \delta),$ где $i_{t+1} = I_{t+1} / K_t$. Обозначим $\gamma_{t+1} = i_{t+1} - \delta,$ тогда можно записать

$$y_{t+1} = y_t\,(1+\ \gamma_{t+1}),$$

где γ_{t+1} – темп роста выпуска в периоде $t+1$ при максимальном использовании трудового времени. С учетом эластичного предложения труда l выпуск фирмы в периоде t равен $f(l_t)\, y_t$. Производственная функция имеет вид $F(K, l) = AKf(l)$. Еще раз подчеркнем, что линейность по капиталу является следствием экстернального воздействия знания, накопленного в экономике. Свой капитал входит в производственную функцию фирмы членом K^{ε}. Чтобы отличить его от капитала любой другой фирмы (они все идентичны), обозначим последний временно K_1. Производство в каждом периоде t максимизирует прибыль по K_t , l_t , вычитая из выручки зарплату и процент за арендованный капитал K_t:

$$max\,[p_t\, AK_t^{\varepsilon}\; K_{1t}^{1-\varepsilon}\; f(l_t\,) - W_t\, l_t - S_t K_t] = \Pi_t \text{ при заданных } p_t, A\, K_{1t}^{1-\varepsilon}, W_t, S_t.$$

Заметим, что естественно положить $f(l) = l^{1-\varepsilon}$, тогда получим функцию Кобба–Дугласа по своему капиталу и труду.

Правительство, как и раньше, контролирует ставку налога τ_t, государственные расходы G_t, внешний долг D_t и предложение денег, в частности темп денежной эмиссии θ_t. Цели правительства те же, что и раньше: подходящим выбором политики (τ_t, θ_t, G_t, D_t) обеспечивать в каждом периоде баланс государственного бюджета и в целом выбрать их так, чтобы максимизировать благосостояние потребителя. В отношении внешнего долга D_t предполагается, что он берется под твердый процент α и используется для покрытия платежного дисбаланса. Единственное ограничение – условие "отсутствия пирамид".

Перепишем задачу потребителя в эквивалентном виде в новых переменных – долях полного выпуска y_t :

$$max \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t\, U(c_t\,, m_t\,, g_t\,;\, l_t) \tag{2.8a}$$

при бюджетном ограничении

$$\begin{aligned}(1+\mu_{t+1})m_{t+1} &= m_t+(1-\tau_t)(w_t\, l_t+ \Pi_t + s_t\,/A) + (1+n_t)b_t\, - \\ &- (1+\mu_{t+1})b_{t+1} - c_t - a(\gamma_{t+1})\end{aligned} \tag{2.8b}$$

с начальными условиями $m_0 > 0$, $b_0 > 0$ (в равновесии соотношение между ними определяется эндогенно).

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\beta_t = \prod_{s=1}^{t} (1+\gamma_s)^{1-\sigma}/(1+\rho)^t,\ t \geq 1,\ \beta_0 = 1;$$

$$1+\mu_t = (1+\gamma_t)(1+\pi_t),$$

где $\pi_{t+1}=(p_{t+1}-p_t)/p_t$, $m_t = M_t/(p_t y_t)$, $w_t = W_t/(p_t y_t)$, $\Pi_t = \Pi_t/p_t y_t$, $s_t=S_t/p_t$, $b_t = B_t/(p_t y_t)$, $c_t = C_t/y_t$, $g_t=G_t/y_t$, $a(\gamma_{t+1}) = (\gamma_{t+1}+\delta)/A$.

В задаче (2.8a), (2.8b) неизвестными являются (c_t, m_t, l_t, b_t, γ_t); величины π_t, Π_t, τ_t, w_t s_t, n_t, а также g_t рассматриваются потребителем как заданные.

Максимизация прибыли производителем дает соотношения для относительных ставок процента на капитал s_t и заработной платы w_t:

$$w_t = f'(l_t), \quad s_t = \varepsilon A f(l_t).$$

Выбор правительством темпа денежной эмиссии $\theta_{t+1}=(M_{t+1}-M_t)/M_t$ в относительных реальных терминах означает соотношение

$$m_{t+1} = m_t(1+\theta_{t+1})/(1+\mu_{t+1}).$$

Выпишем условия равновесия потребителя. Обозначим через r_t реальный процент в экономике, $r_t = n_t - \pi_t$; λ_t – дисконтированный (по β_t) множитель Лагранжа ограничения (2.8b) и L_t – функция Лагранжа (периода t) задачи (2.8a), (2.8b):

$$L = \beta_t U + \lambda_t\beta_t[-(1+\mu_{t+1})m_{t+1} + m_t + (1-\tau_t)(w_t l_t + \Pi_t + s_t/A) + (1+n_t)b_t -$$

$$-(1+\mu_{t+1})b_{t+1} - c_t - a(\gamma_{t+1})].$$

Условия оптимальности первого порядка по c, m, l, b имеют вид

$$U_c'(t) = \lambda_t,$$

$$\beta_t U'_m(t) = -\lambda_t\beta_t + (1+\mu_t)\lambda_{t-1}\beta_{t-1},$$

$$U'_l(t) = -\lambda_t(1-\tau_t)w_t,$$

$$0 = -\lambda_t\beta_t(1+n_t) + \lambda_{t-1}\beta_{t-1}(1+\mu_t).$$

Кроме этого, должны выполняться условия трансверсальности по m и b. Упрощая, опуская индекс t и используя условия оптимальности производства, получаем систему уравнений:

$$U_c'(c, m, g; l) = \lambda, \tag{2.9a}$$

$$U'_m(c, m, g; l) = \lambda n, \tag{2.9b}$$

$$U'_l(c, m, g; l) = -\lambda(1-\tau)f'(l). \tag{2.9c}$$

Стационарное решение задачи потребителя. Пусть правительство выбирает постоянные $\tau_t \equiv const$, $g_t \equiv const$, $\theta_t \equiv const$. Найдем стационарное решение системы (2.9a) – (2.9c), соответствующее политике (τ, θ, g). Система (2.9a) – (2.9c) не содержит динамических связей. Будем искать ее статическое решение с постоянными λ и n. Пусть $c(\lambda,\tau,n,g)$, $m(\lambda,\tau,n,g)$,

$l(\lambda, \tau, n, g)$ – неявные дифференцируемые функции, разрешающие систему (2.9a)–(2.9c) относительно c, m, l. Тогда c, m, l также не меняются во времени. Как следствие, получаем следующие факты.

Равенства $\theta_t \equiv const$, $m_t \equiv const$ и $m_{t+1} = m_t(1+\theta_{t+1})/(1+\mu_{t+1})$ дают соотношение

$$\mu_t \equiv \mu = \theta = const.$$

Так как $1+\theta = (1+\gamma_t)(1+\pi_t)$, то при заданном θ выбор темпа роста γ_t приводит автоматически к обратному изменению темпа инфляции π_t.

Далее, условие оптимальности по b и равенство $\lambda_t = const$ дают

$$(1+n_t)/(1+\mu_t)=(1+r)/(1+\gamma_t)=(1+\rho)/(1+\gamma_t)^{1-\sigma}.$$

Отсюда $1+r = (1+\rho)(1+\gamma_t)^{\sigma}$, в первом приближении для малых величин получаем $r = \rho + \sigma\gamma_t$. Следовательно, $\gamma_t = const$ и $\pi_t = const$. Получаем формулу реального процента:

$$1+r = (1+\rho)(1+\gamma)^{\sigma} \text{ или приближенно } r = \rho + \sigma\gamma,$$

а также соотношение $n - \theta = r - \gamma$.

Дисконт β в редуцированной задаче (2.8a), (2.8b) определяется стационарным темпом роста γ:

$$\beta = (1+\gamma)^{1-\sigma}/(1+\rho).$$

Таким образом, связь между реальным процентом r, временным дисконтом β и темпом роста γ принимает вид $\beta = (1+\gamma)/(1+r)$, или, в более привычной приближенной форме, $(1/\beta) - 1 = r - \gamma$.

Заметим, что такая связь реального процента, постоянного временного предпочтения и темпа роста необходима для существования позитивных результатов при анализе динамики любой модели такого сорта, в частности для существования траектории стационарного роста. В моделях статического равновесия (при $\gamma = 0$), подобных рассмотренной ранее, реальный процент r оказывался равным темпу временного предпочтения ρ. В редуцированной модели роста (2.8a), (2.8b) дисконт увеличивается – умножается на величину $(1+\gamma)^{1-\sigma}$, реальный процент соответственно вычисляется по приведенной выше формуле. В оптимальном равновесии в силу равенства $r = \alpha$ и формулы $r = \rho + \sigma\gamma$ реальный процент и темп роста определяются единственным образом: $r = \alpha$ и $\gamma = (\alpha - \rho)/\sigma$, становясь фактически параметрами модели.

Покажем теперь, что b_t остается константой, когда политика (τ, g, θ), номинальный процент n и переменные c, m, l постоянны. Подставим выражения c, m, l через λ, τ, n, g в бюджетное равенство потребителя (7.8b), учитывая при этом оптимальность производства. Обозначим

$$\Delta b = c + \theta m + a(\gamma) - (1-\tau)f(l).$$

Тогда бюджетное равенство потребителя принимает вид

$$\Delta b = (1+n)b_t - (1+\theta)b_{t+1}.$$

Здесь Δb постоянно во времени (и следует ожидать, положительно, т.к. нормально потребитель получает реальный доход от управления портфелем облигаций). Рассмотрим разностное уравнение

$$b_{t+1} = [(1+n)b_t - \Delta b]/(1+\theta)$$

и воспользуемся условиями трансверсальности на правом конце фазовых траекторий b_t и m_t:

$$\lambda b_t \beta^t \to 0 \text{ и } \lambda m_t \beta^t \to 0 \text{ при } t \to \infty,$$

где $\beta = (1+\gamma)^{1-\sigma}/(1+\rho) = (1+n)/(1+\theta)$.

Так как $m_t = const$, $\lambda \neq 0$, а $\beta < 1$ (об этом см. ниже), то условие по m_t выполнено. Условие по b_t совпадает в данном случае с условием "отсутствия пирамид"

$$b_t \beta^t \to 0 \text{ при } t \to \infty,$$

которое требует, чтобы потребитель (а также и правительство) не выстраивали "пирамиды" внутренних долгов. Разворачивая правую часть разностного уравнения до $t = 0$ и применяя к нему данное условие, получаем соотношение $\Delta b = b_0 (n - \theta)$, или, эквивалентным образом, $\Delta b = b_0(r - \gamma)$. При этом $b_t \equiv b_0$ является стационарной точкой разностного уравнения, что проверяется непосредственно.

Определим новое начальное условие b_0 из суммы $b_0 + m = (M_0 + B_0)/p_{-0}y_0$, где $m = m(\lambda, \tau, n, g)$, $y_0 = AK_0$. Тогда бюджетное ограничение потребителя (2.8b) можно записать в виде:

$$(b_0 + m_0)(r - \gamma) + (1-\tau)f(l) - nm - c - a(\gamma) = 0. \quad (2.9d)$$

Здесь c, m, l суть функции от λ, τ, n, g.

При выводе стационарной системы уравнений использовалось неравенство $\theta < n$, что равносильно $\gamma < r$. Действительно, задача максимизации функционала (2.8a), эквивалентная исходной задаче потребителя, имеет решение, если дисконт $(1+\gamma)^{1-\sigma}/(1+\rho)$ меньше 1. Отсюда получаем $(1+\gamma)/(1+r) < 1$. Умножая числитель и знаменатель на $(1+\pi)$, получаем $(1+\theta)/(1+n) < 1$, откуда $\theta < n$ и $\gamma < r$.

Равновесный стационарный рост. Пусть правительство объявляет и далее проводит постоянную политику (τ, g, θ). Под *равновесным стационарным ростом с совершенным предвидением* понимается набор скалярных параметров π, П, w, s, n, таких, что скаляры c, m, l, b являются решением задач потребителя и производства, и при этом выполняется баланс ресурсов в системе. Баланс ресурсов в относительных к выпуску величинах имеет вид

$$c + a(\gamma) + g = f(l) + (1+\gamma)d_{t+1} - (1+\alpha)d_t.$$

Обозначим $\Delta d = c + a(\gamma) + g - f(l)$, так что $\Delta d = (1+\gamma)d_{t+1} - (1+ \alpha)d_t$ – результирующий (относительный к выпуску) платеж по внешнему долгу, постоянный во времени. Считаем Δd отрицательным числом, т.е. что страна – должник. Чтобы правительство не выстраивало "пирамиды" внешних долгов, потребуем, чтобы выполнялось следующее условие

$$d_t(1+\gamma)^t/(1+\alpha)^t \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Действуя далее точно так же, как с внутренним долгом, приходим к выражению $\Delta d = - d_0 (\alpha - \gamma)$ и стационарной точке $d_t \equiv d_0$. Стационарное выражение баланса по ресурсам принимает вид

$$c + a(\gamma) + g = f(l) - d_0(\alpha - \gamma).$$

Суммируем полученные соотношения в систему уравнений, которой должен удовлетворять равновесный стационарный рост, соответствующий постоянной политике τ, g, θ:

$$U_c'(c, m, g; l) = \lambda, \tag{2.10a}$$

$$U'_m(c, m, g; l) = \lambda n, \tag{2.10b}$$

$$U'_l(c, m, g; l) = -\lambda(1-\tau)f'(l), \tag{2.10c}$$

$$(b_0 + m_0)(n - \theta) + (1-\tau)f(l) - nm - c - a(\gamma) = 0, \tag{2.10d}$$

$$c + a(\gamma) + g = f(l) - d_0(\alpha - \gamma). \tag{2.10e}$$

Здесь пять статических уравнений и формально пять неизвестных: c, m, l, λ, n. Однако имеется дополнительная связь между n и θ : $n = \theta + r - \gamma$, где $r = \alpha$ – параметр и γ выражается через r, ρ и σ. Поэтому для поддержания (аккомодации) равновесия требуется использовать один из параметров политики: τ, g, θ, или d_0 . Напомним, что b_0 определяется рыночной операцией купли–продажи облигаций. Мы используем для аккомодации d_0. (С. Турновский (1987) в модели малой открытой экономики рассмотрел разные варианты аккомодации равновесия и показал, что с точки зрения оптимального выбора θ есть существенное различие в том, за счет какого параметра это делается.) Таким образом, чтобы выйти на траекторию стационарного равновесного роста, правительство устанавливает постоянную политику (τ, g, θ), осуществляет через центральный банк в начальный момент куплю–продажу облигаций, а также скачком производит изменение начального внешнего долга.

2.3. Задача Фелпса

Е. Фелпс (1973) получил соотношение, связывающее обычные и инфляционные налоги в рамках рамсеевской политики в статической задаче. В динамической постановке для модели замкнутой экономики (в непрерывном времени) С. Турновский и У. Брок (1980) показали несостоятельность во времени решения задачи Фелпса. Решение сводилось к режиму Фридмана с нулевыми налогами. В разделе 2.2 было сделано специальное предположение А), согласно которому каждое правительство обязуется уважать накопленное финансовое богатство потребителя. Вместе с предположением В) о равенстве дисконта, внутреннего реального процента и внешнего оно позволило обосновать стационарность состоятельных рамсеевских политик и соответствующих им равновесий. Опишем еще раз кратко ход рассуждений.

Правительство выбирает постоянную политику (τ, θ) и стационарную политику в отношении G_t и D_t (определение зависит от того, равен ли темп роста экономики нулю или больше нуля). Оно объявляет и проводит эту политику. В ответ на нее агенты находят рыночное равновесие. Если система соотношений, определяющих это равновесие, сводится к статической, то оптимизация производится при статических ограничениях. Если при этом выполнены предположения А) и В), то рамсеевская политика не вырождается в несостоятельный режим Фридмана, а дает оптимальный состоятельный стационарный режим, который можно охарактеризовать соотношением в духе Фелпса. Подчеркнем, что именно дополнительное требование состоятельности стационарной политики позволяет рассматривать задачу Рамсея как статическую. Часть политики правительства состоит в перестройке начальных условий по деньгам и облигациям путем «мгновенной» интервенции на открытом рынке и изменении внешнего долга. Включение капитала в модель стационарного роста представляет собой проблему с точки зрения состоятельности. В разделе 2.2 предложен вариант решения этой проблемы, когда модель сбалансированного роста можно свести к модели без капитала. Дальнейшее будет связано с характеризацией состоятельной рамсеевской политики в рамках статической задачи. Проделаем это для модели сбалансированного роста; для стационарной модели из раздела 2.1 выкладки совершенно аналогичны, см. Е. Фелпс (1973) .

Е. Фелпс предполагал, что сумма налоговых поступлений не зависит от вариаций политики (чтобы не приводить к изменению реальных переменных). Мы несколько видоизменим это требование в том же направлении, предполагая, что баланс правительственного бюджета сводится с нулевым дисбалансом независимо от колебаний политики, по крайней мере в окрестности оптимальной политики.

Будем предполагать также, что система (2.10a) – (2.10e) имеет единственное решение $c(\tau,\theta, g)$, $m(\tau,\theta, g)$, $l(\tau,\theta, g)$, $\lambda(\tau,\theta, g)$, $d_0(\tau,\theta, g)$ в некоторой области политик τ, g, θ. Максимизация полезности потребителя на ограничении (2.10a) – (2.10e) по постоянным политикам даст систему условий оптимального роста. Пусть $V(\tau,\theta, g)$ – значение функционала в задаче потребителя на оптимальной траектории стационарного роста $c(\tau,\theta, g)$, $m(\tau,\theta, g)$, $l(\tau,\theta, g)$, g. Рассмотрим задачу правительства

$$\max V(\tau,\theta, g) \tag{2.11}$$

на бюджетном ограничении

$$\tau f(l(\tau,\theta, g)) + nm(\tau,\theta, g) - g - d_0(\tau,\theta, g)(r - \gamma) = (b_0 + m_0)(r - \gamma). \tag{2.12}$$

Соотношение (2.12) получено вычитанием (2.10e) из (2.10d) и использованием равенства $n - \theta = r - \gamma$. Так как правая часть (2.12) постоянна (в силу условия А)) и не зависит от политики, то ограничение (2.12) говорит, что и левая часть – сумма налоговых поступлений за вычетом государственных расходов и платежей по внешнему долгу – должна оставаться постоянной. На более формальном языке можно сказать, что допустимыми политиками являются такие τ, θ , g, которые оставляют левую часть (2.12) неизменной. Обозначим $E = (b_0 + m_0)(r - \gamma)$.

Условимся обозначать через V_τ, c_τ и т.п. соответствующие частные производные на оптимальной стационарной траектории. Выпишем значения производных V_τ, V_n и V_g, учитывая соотношения (2.10a) – (2.10c) и опуская постоянный множитель, равный сумме дисконта. Чтобы придать результату форму соотношения Фелпса, дифференцируем V по n, а не по θ, которое отличается от последнего на константу $(r - \gamma)$:

$$V_\tau = U_c \cdot [c_\tau + nm_\tau - (1-\tau) f'(l) l_\tau],$$

$$V_n = U_c \cdot [c_n + nm_n - (1-\tau) f'(l) l_n],$$

$$V_g = U_c \cdot [c_g + nm_g - (1-\tau) f'(l) l_g] + U_g .$$

Продифференцируем теперь по τ, n и g бюджетное ограничение потребителя (2.10d). Замечаем, что первый и последний члены в левой части (2.10d) являются тождественными константами: $(b_0 + m_0)(r - \gamma) \equiv const$ и $a(\gamma) \equiv const$. Поэтому получаем

$$f(l) + [c_\tau + nm_\tau - (1-\tau) f'(l) l_\tau] = 0,$$

$$m + [c_n + nm_n - (1-\tau) f'(l) l_n] = 0,$$

$$[c_g + nm_g - (1-\tau) f'(l) l_g] = 0.$$

Подставляя скобки из предыдущих выражений, получаем

$$V_\tau = -U_c\, f(l), \tag{2.13a}$$

$$V_n = -U_c\, m, \tag{2.13b}$$

$$V_g = U_g . \tag{2.13c}$$

Вернемся к задаче правительства. Условия первого порядка для этой задачи имеют вид

$$V_\tau = -\eta\, [\tau f + nm - g - d_0(r - \gamma)]'_\tau,$$

$$V_n = -\eta\, [\tau f + nm - g - d_0(r - \gamma)]'_n,$$

$$V_g = -\eta\, [\tau f + nm - g - d_0(r - \gamma)]'_g,$$

где η – скалярный множитель Лагранжа для бюджетного ограничения правительства. Подставляя в левые части выражения (2.13a) – (2.13c), получаем соотношение

$$[\tau f(l) + nm - g - d_0(r - \gamma)]'_\tau / f(l) = [\tau f(l) + nm - g - d_0(r - \gamma)]'_n / m =$$

$$= -[\tau f(l) + nm - g - d_0(r - \gamma)]'_g : U_g / U_c = U'_c / \eta = const > 0. \tag{2.14}$$

Первое равенство в (2.14) означает, что маргинальный вклад в бюджет налога с производственного дохода, приходящийся на единицу выпуска, равен маргинальному вкладу инфляционного (по Фелпсу) налога, приходящемуся на единицу реальной денежной массы. Это соотношение Фелпса для нашей модели роста, записанное в относительных к потенциальному выпуску величинах. Второе равенство возникает при рассмотрении государственных расходов, как политики; оно говорит, что такое же значение имеет маргинальный вычет из бюджета государственных расходов, приходящийся на единицу предельной полезности этих расходов в потребительском эквиваленте.

В результате можно сделать следующее утверждение.

Утверждение 2.2. *В модели Сидравского с гомотетичными, гладкими, выпуклыми предпочтениями потребителя, производственной AK–функцией Ромера и правительством, выполняющим условия A), B), а также в предположении существования и единственности всех решений агрегированная состоятельная рамсеевская политика и соответствующая стационарная траектория роста характеризуются соотношением Фелпса (2.14).*

Соотношение (2.14) характеризует оптимальный состоятельный стационарный рост экономики в относительных к потенциальному выпуску величинах. Отметим, что фиксированный начальный капитал K_0 здесь не является помехой состоятельности. Начиная с заданного K_0 капитал будет расти, как и другие переменные, с фиксированным темпом γ.

Список литературы

1. Ramsey F. *A contribution to the theory of taxation* // Economic J. – 1927. – V.37. – P. 47 – 61.
2. Sidrausky M. *Rational Choice and Patterns of Growth in a monetary economy* // American Economic Review Papers and Proceedings. – 1967. – V.57, № 2. – P. 534 – 544.
3. Sargent T., Wallace N. *The stability of Models of Money and Growth with Perfect Foresight* // Econometrica. – 1973. – V.41, № 6. – P. 1043 – 1048.
4. Kydland F., Prescott E. *Rules Rather than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans* // J. of Political Economy.–1977.–V.85, № 3. – P. 473 – 491.

5. Calvo G. *On the Time Consistency of Optimal Policy in a Monetary Economy* // Econometrica. – 1978. – V.46, № 6. – P. 1411 – 1428.
6. Phelps E. S. *Inflation in the theory of public Finance* // Swedish J. of Economics. – 1973. – V.74. – P. 67 – 82.
7. Chamley C. *On a simple rule for the optimal inflation rate in second best taxation* // J. of Public Economics. – 1985. – V.26. – P. 35 – 50.
8. Lucas R. *Inflation and Welfare* // Econometrica. – 2000. – V. 68, № 2. – P. 247 – 274.
9. Turnovsky S., Brock W. *Time consistency and optimal government policies in perfect foresight equilibrium* // J. of Public Economics. – 1980. – V.13, № 2. – P. 183 – 212.
11. Turnovsky S. *Macroeconomic Dynamics*. – Cambridge: MIT Press, 2000.
12. Сотсков А.И. *Об оптимальном соотношении между налогами, денежной эмиссией и займами* // Экономика и мат. методы. – 2002. – Т. 38, № 1. – С. 76 – 93.

Оглавление

СОТСКОВ Александр Иванович

КОЛЕСНИК Георгий Всеволодович

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ В ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИКИ

Учебное пособие

Редактор С.В. Григорьева
Технический редактор А.А. Медведева
Подписано в печать 13.07.2005. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$.
Бумага типографская № 1. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 7,5. Уч.-изд.л. 7,0. Тираж 100 экз. Заказ № 324.
Тверской государственный университет,
Редакционно-издательское управление.
Адрес: Россия, 170000, г. Тверь, ул. Желябова, 33.
Тел. РИУ: (0822) 35-60-63.